|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1.** **Отыскание точек локального экстремума функции. Достаточные условия экстремума.**  1°.Чтобы дифф‒мая на (*а, b*) *f* (*х*)не убывала (не возрастала)на (*а, b*), **необ­ходимо и достаточно**, чтобы *f '* (*x*) ≥ 0 (≤ 0) на (*а, b*).  2°. Чтобы дифференци­руемая *f* (*х*) *возрастала (убывала)* на (*а, b*)*,* **до­статочно,** чтобы *f '* (*x*) > 0 (< 0) всюду на (*а, b*).  Пусть *f* (*х*)определена всюду в некоторой окрестности точки *с. f* (*х*) *имеет в точке c* ***локальный максимум (минимум)****, если* Ǝ *такая окрестность точки с, в пределах которой f* (*с*) *является наибольшим (наимень­шим) среди всех других значений функции.*  *Необходимое условие экстре­мума: если f* (*х*) *дифференци­руема в точке с и имеет в этой точке экстремум, то f '* (*с*) *=* 0.  **1‒е ДУЭ**. **Т1***. Пусть с ‒ точка возможного экстремума f* (*х*), *и пусть f* (*х*) *дифференцируема всюду в некоторой окрестности точки с. Тогда, если в пределах этой окрестности f '* (*x*) *>* 0(< 0) *слева от точки с и f '* (*x*) <0 (> 0) *справа от с, то f* (*х*) *имеет в точке с локальный максимум (минимум). Если f '* (*x*) *имеет один и тот же знак слева и справа от с, то экстремума в точке с нет.*  *Док‒во*. 1) Пусть в пределах рассматриваемой окрестности *f '* (*x*) >0 (*f '* (*x*) < 0) слева от *с* и *f '* (*x*) < 0 ( *f '* (*x*) > 0) справа от *с.* Пусть *х0 ‒*  значение аргумента из этой окрест­ности: *х0*≠*с. f* (*х*)диф‒ма (=> непрерывна) на [*с, х0*]*.* Применяя к *f* (*х*)по [*с, х0*] Т. Лагранжа:  *f* (*с*) *‒ f* (*х0*)*=* *f* '(*ξ*)(*с ‒ х0*)**(1)**  где *с < ξ <* *х0.* Т.к. *f* ' (*ξ*)>0 (<0) при *х0* < *с* и *f* ' (*ξ*)<0 ( > 0 при  *х0 >с*)*,* правая часть (1) >0 (<0) => левая тоже => значение *f* (*с*) *‒* наибольшее (наи­меньшее) среди всех значений *f* (*х*)в окрестности.  2) Если *f '* (*x*) имеет один и тот же знак слева и справа от *с,* то правая часть (1) имеет раз­ныезнаки при *x0* < *с* и при *х0* > *с =>* отсутствие экстремума в точке *с.*  **Т1.1*.*** *Пусть f* (*x*) *дифференцируема в некоторой окрестности точки с, за исключением, быть может, самой точки с, и непрерывна в точке с. Тогда, если в пределах этой окрестности*  *f '* (*x*) *> 0* ( *< 0*) *слева от с и f '* (*x*) < *0* ( *> 0*) *справа от с, то f* (*х*) *имеет в точке с локальный максимум (минимум). Если f '* (*x*) *имеет один и тот же знак слева и справа от с, то экстремума в точке с нет.*  Док‒во ан‒но, но применимость Т. Лагранжа устанавливается так: по условию функция диф‒ма (=> непрерывна) всюду на (*с, х0*]и непрерывна в точке *с => f (х)* непрерывна всюду на [*с, х0*]и диф‒ма во всех внутренних точках [*с, х0*].  **2‒е ДУЭ. Т2*.*** *Пусть f* (*х*) *имеет в данной точке с возможного экстремума конечную* 2*‒ую производную. Тогда f* (*х*) *имеет в точке с максимум, если* *f* (2) *(c)* < *0*, *и минимум, если* *f* (2) *(c)* > *0*.  *Док‒во*. Из *f* (2) *(c)* < *0* (*f* (2) *(c)* > *0*) и Т2° => *f '* (*x*) убывает (возрастает) в точке *с.* По условию *f '* (*c*) *=* 0 => Ǝ такая окрестность точки *с,* в пределах которой *f '* (*x*) *>*0 (<0) слева от с и *f '* (*x*) *<*0 (>0) справа от *с =>* по Т1 *f* (*х*) имеет в точке с максимум (минимум).  **3‒е ДУЭ. Т3.** Пусть *п ≥ 1‒* *целое число и пусть функция у* = *f* (*x*) *имеет производную порядка п в некоторой окрестности точки с и производную порядка п*+1 *в самой точке с. Пусть справедливы*: *f* (1)(*c*) = *f* (2)(*c*) = …= *f* (*n*)(*c*) = 0, *f* (*n*+1)(*c*) ≠ 0 **(2)**  *Если п ‒* ***нечет­ное***,  *то у = f* (*х*) *имеет локальный экстремум в точке с: локальный минимум при f* (n+1)(*c*) > 0 *и локальный максимум при f* (n+1)(*c*) < 0.  *Док‒во.* При *п =* 1 это Т2.  Пусть *п ≥* 3 и *f* (n+1)(*c*) > 0 (для *f* (n+1)(*c*) < 0 ан‒но) => по Т2, примененной к *f* (n) (*x*)*,* функция *f* (n) (*x*)возрастает в точке *с.* Поскольку *f* (n)(*с*) *=* 0 => найдется достаточно малая окрестность точки с, в пределах которой *f* (n) (*x*) *<* 0слева от с и *f* (n) (*x*) *>* 0справа от с. Разложим *f '* (*x*) в окрестности точки *с* по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа => для *х* из достаточно малой окрестности точки *с* между *с* и *х* Ǝ ξ:  Из **(2)** и доп. условия *f* ' (*с*) = 0 =>  *ξ* лежит между *с* и *х* => для всех *х* из малой окрестности точки *с*:  *f* (n)(*c*) < 0при *х* < с и *f* (n)(*c*) > 0 при *х> с.* При нечетном *п* число *n* ‒ 1 ‒ четное => вся правая (и левая) часть **(3)** для всех *х* из малой окрестности *с* отри­цательна слева от *с* иположительна справа от *с.* По Т1 *f* (*x*) имеет локальный минимум в точке *с.* | **3. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования графика функции.**  ***О1****. Прямая х = а является верти­кальной асимптотой графика функции у* = *f* (*х*)*, если хотя бы одно из предельных значений*  или *равно +∞ или ‒∞.*  Пусть функция *у* = *f* (*х*) определена для сколь угодно больших значений аргумента, ради определенности *положитель­ного* знака.  ***О2****. Прямая Y = kх + b является наклонной асимптотой графика функции у = f* (*х*) *при х→*+∞, *если f* (*х*) *представима в виде f* (*х*) *= kx + b + α*(*х*)*, где .*  ***Т1.*** *Для того чтобы график функции у = f* (*х*) *имел при х→*+∞ *наклонную асимптоту Y = kх + b необходимо и доста­точно, чтобы* Ǝ *два предельных значения*  *Док‒во.* 1) Необходимость. Пусть график функции  *у = f* (*х*)имеет при *х→*+∞ асимптоту *Y = kх + b*,  т. е. *f* (*х*) *= kx+b+α*(*х*) *=>*  2) Достаточность. Пусть Ǝ предельные зна­чения (1). Из 2‒го => разность *f* (*х*) ‒ *kх* ‒ *b* является бесконечно ма­лой при *х→*+∞. Обозначив эту бесконечно малую *α*(*х*)*,* получим для *f* (*х*) представление  *f* (*х*) *= kx + b +α (x)*.  *Замечание*. Для *х→*‒∞ все аналогично.  **Схема исследования графика функции**  1°. Уточнить область задания функции.  2°. Выяснить вопрос о существовании асимптот (вертикальных и наклонных).  3°. Найти области возрастания и убывания функции и точки экстремума.  4°. Найти области сохранения направления выпуклости и точки перегиба.  5°. Найти точки пересечения графика функции с осью *Ох.* |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **2. Направление выпуклости графика функции и точки перегиба. Достаточные условия перегиба.**  *f* (*x*) дифф‒ма в точке (*а, b*) =>Ǝкасательная к графику *у = f* (*х*)*,* проходящая через *М* (*х, f* (*х*)) (*а < х <b*)*,*  иона не параллельна *Оу*  **О1*.*** *График у = f* (*х*) *имеет на* (*а, b*)***выпуклость, направленную вниз (вверх)****, если этот график в пределах* (*а, b*) *лежит не ниже (не выше) любой своей касательной.*  **Т1*.*** *Если у = f* (*х*) *имеет на* (*а,b*) *конечную 2‒ю производную и если f* (2) (*х*) *≥* 0(*f* (2) (*х*) *≤* 0) *всюду на* (*а,b*)*, то график функции у* = *f* (*х*) *имеет на* (*а, b*) *выпуклость, направ­ленную вниз* (*вверх*)*.*  *Док‒во.* Пусть *f* (2) (*х*) *≥* 0 на (*а, b*)(для *f* (2) (*х*) *≤* 0 ан‒но)*, с ‒* точка из (*а, b*). Уравне­ние касательной, проходящей через  *М* (*с, f* (*с*)) (текущая орди­ната ‒Y): *Y* ‒ *f* (*с*) *= f* '(*с*)(*x‒c*)**(1)**  Разложим *f* (*х*)в окрестности *с* по фор­муле Тейлора при *п* = 1:  где остаточный член в форме Лагранжа, ξ ‒ между *с* и *х.* По условию *f* (*х*)имеет 2‒ю производную на (*а, b*)*=>* **(2)** справедливо для  *х* ∈ (*а, b*)*.* Из **(1)** и **(2)**: **(3)**  Т.к. *f* (2) (*х*) *≥* 0 на (*а, b*), то правая часть **(3)** *неотрицательна=>* для *х* ∈ (*а, b*): *у ‒ Y ≥* 0 => *у ≥* *Y* => график *у = f* (*х*)на (*а, b*)лежит не ниже касатель­ной **(1)**.  **Т2***. Пусть 2‒я производная у = f* (*х*) *непрерывна и положительна* (*отрицательна*) *в точке с. Тогда* Ǝ *такая окрестность точки с, в пределах которой гра­фик функции у = f* (*х*) *имеет выпуклость, направленную вниз (вверх).*  *Док‒во*. По теореме об устойчивости знака непрерывной функции Ǝ окрестность точки *с*:в ее пределах *f* (2) (*х*) *>*0 (< 0). По Т1 график  *f* (*х*)имеет в этой окрестности выпуклость вниз (вверх). •  **О2*.*** *Точка М* (*с, f* (*с*)) *графика функции у* = *f* (*х*) *называется* ***точкой перегиба*** *этого графика, если* Ǝ *такая окрестность точки с оси абсцисс, в пределах которой график f* (*х*) *слева и справа от с имеет разные направления выпуклости.*  **Л1*.*** *Пусть функция у = f* (*х*) *имеет f '* (*x*)  *всюду в δ ‒окрестности точки с, причем f '* (*x*) *непрерывна в точке с. Тогда, если график*  *f* (*х*) *имеет на интервале* (*с*, *с* + *δ*) *выпуклость, направленную вниз* (*вверх*)*, то всюду в пределах (с, с+ δ*) *этот график лежит не ниже* (*не выше*) *касательной к графику, проведенной в точке М* (*с, f* (*с*))*.*  *Док‒во.* Рассмотрим {*хn*}∈ (*с*, *с* + *δ*): {*хn*}→*с.* Через каждую  *Мп* (*хn, f* (*хn*)) графика *у = f* (*х*)проведем каса­тельную:  *Yn* = *f* (*хn) + f* ' (*хn*)(*x ‒ хn*)*.* Т.к. график имеет на (*с*, *с* + *δ*) выпуклость, направленную вниз (вверх) => для *п* и *х* ∈ (*с*, *с* + *δ*): *f* (*х*) *‒ Yn* =  *f* (*х*) *‒ f* (*хn*) *‒ f '* (*хn*)(*x‒ хn*) *≥* 0 (≤ 0)**(4)**  *f '* (*x*) непрерывна в точке *с* (=> *f* (*х*) тоже*)=>*из определения непрерывности по Гейне Ǝ  = >из **(4)** и Т\*(*Если элементы сходящейся* {*хп*}*, начиная с некоторого n, удовлетворяют неравенству хп ≥ b (хп ≤ b), то и предел а этой* {*хп*} *удовлетво­ряет неравенству а ≥ b* (*а ≤ b*)):  Переходя в **(4)** к пределу при *п→∞* и по Т\*, получим:  *f* (*x*) *‒ Y ≥* 0 (≤ 0) для *х* ∈ (*с, с* + *δ*)*,* где *Y* ‒ текущая ордината касательной (1), проходящей через точку *М* (*с*, *f* (*с*)). | **Л2*.*** *Пусть у* = *f* (*х*) *имеет f* '*(х) в некоторой окрестности точки с, причем f* '*(х) непре­рывна в точке с. Тогда, если график у = f* (*х*) *имеет пере­гиб в точке М* (*с, f* (*с*))*,* *то в пределах достаточно малой δ ‒окрест­ности точки с этот график слева и справа от с лежит по разные стороны от касательной, проведенной через М.*  Для док‒ва выбрать *δ* > 0 настолько малым, чтобы на каждом из  (*с* ‒ *δ* , *с*)и (*с*, *с* + *δ*) график *у* = *f* (*х*)имел определенное направ­ление, и применить Л1 по каж­дому интервалу.  **Т3(*необходимое условие перегиба*)*.*** *Если у = f* (*х*) *имеет в точке с f* (2)(*с*) *и график f* (*х*) *имеет перегиб в точке М*(*с, f* (*с*))*, то f*(2)(*с*)*=*0.  *Док‒во*. *Y ‒* текущая ордината касательной *Y=* *f* (*с*) *+ f* '(*с*)(*x‒c*), проходящей через *М*(*с, f* (*с*))*.* Функция *F*(*x*) *= f* (*x*) *‒ Y = f* (*x*) *‒ f*(*с*) *‒ ‒  f* '(*с*)(*x‒c*),как и *f* (*х*)*,* имеет в точке *с* 2‒ю производную (=> имеет *F* '*(х)* в некоторой окрестности *с,* причем *F* '*(х)* непрерывна в точке с). По Л2 в малой окрестности точки *с* график *у = f* (*х*)лежит слева и справа от *с* по разные стороны от касательной, проходящей через *М* (*с, f* (*с*))*=>* *F*(*х*)в малой окрестности точки *с* имеет слева и справа от *c* разные знаки => у *F*(*х*)нет в *с* локального экстремума. Пусть *f* (2)(*с*)*≠* 0 => т.к. *F '*(*х*) *= f '*(*x*) *‒ f '*(*с*), *F* (2)(*x*) *= f* (2)(*x*)*,* то  *F'* (*с*) = 0, *F*(2) (*c*) *≠ 0* и *F*(*х*)имеет в точке *с* локальный экстремум по Т (*Пусть f* (*х*) *имеет в данной точке с возможного экстремума конечную 2‒ую производную. Тогда f* (*х*) *имеет в точке с максимум, если f* (2) < *с*, *и минимум, если f* (2 ) > *с* ) => *f* (2) (*с*)= 0.  **1‒е ДУП**. **Т4*.*** *Пусть у* = *f* (*х*) *имеет f* (2) (*с*) *в некоторой окрест‒ности точки с и f* (2) (*с*)= 0. *Тогда, если в пределах этой окрестно‒сти f* (2)(*х*) *имеет разные знаки слева и справа от с, то график f* (*х*) *имеет перегиб в точке М* (*с, f* (*с*))*.*  *Док‒во.* Из усло­вий => Ǝ конечная *f* '(*с*) *=>* график *f* (*х*) имеет касательную в *М* (*с, f* (*с*)). *f* (2)(*х*)слева и справа от *с* имеет разные знаки => из Т1 => направление выпуклости вокруг *с* различно.  **2‒е ДУП**. **Т5*.*** *Если у = f* (*х*) *имеет в с конеч­ную f* (3) (*c*) *и f* (2) (*c*)*=0, f* (3) (*c*) ≠ *0*, *то график f* (*х*) *имеет перегиб в точке М* (*с, f* (*с*)).  *Док‒во.* Из *f* (3) (*c*) *≠* 0и из Т\*\* (*Если f* (*x*) *дифференцируема в точке с и f '*(*с*)*>0* (*f '*(*с*)*<0*)*, то f* (*x*) *возрастает (убывает) в с*) => *f* (2*)* (*х*) либо возрастает, либо убы­вает в точке *с.*  *f* (2) (*с*)= 0 => Ǝ такая окрестность точки *с,* в пределах которой *f* (2) (*х*)имеет разные знаки слева и справа от *с =>* по Т4 график *у = f* (*х*)имеет перегиб в точке *М* (*с, f* (*с*))*.*  **3‒е ДУП**. **Т6.** *Пусть п ≥ 1‒* *целое число и пусть функция у* = *f* (*x*) *имеет производную порядка п в некоторой окрестности точки с и производную порядка п*+1 *в самой точке с. Пусть справедливы*: *f* (2)(*c*) = *f* (3)(*c*) = …= *f* (n)(*c*) = 0, *f* (n+1)(*c*) ≠ 0 **(5)**  *Тогда, если п - четное, график у* = *f* (*х*) *имеет перегиб в М* (*с, f* (*с*))*.*  *Док‒во.* *п* ‒ чет­ное. При *п = 2* это Т5. Пусть *п ≥* 4. Из *f* (n+1)(*c*) ≠ 0 и из Т\*\*, примененной к функции *f* (n)(*x*) => *f* (n)(*x*) или возрастает, или убывает в точке *с.* Т.к. *f* (n)(*c*) = 0 => Ǝдостаточно малая окрестность точки *с,* в пределах которой *f* (n)(*x*) справа и слева от *с* имеет разные знаки. Разложим *f* (2) (*х*)в окрестности точки *с* по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа => для *х* из достаточно малой окрестности точки *с* между *с* и *х* Ǝ ξ:  Т. к. в пределах достаточно малой окрестности *с*  *f* (n)(*x*) имеет разные знаки справа и слева от *с* и т. к. *ξ* лежит между *с* и *х*, то  *f* (n) (*ξ*) ( в силу четности *n*, и вся правая часть **(6)**) имеет разные знаки справа и слева от *с=>* *f* (2) (*х*)в пределах малой окрестности *с* имеет разные знаки справа и слева от *с =>* по Т4 график *у* = *f* (*х*)имеет перегиб в *М* (*с, f* (*с*)). |

|  |  |
| --- | --- |
| **4. Понятие интегрируемости функции. Леммы Дарбу о верхних и нижних суммах.**  Пусть *f* (*х*)задана на [*а, b*], *а < b*, *Т* ‒ разбиение [*а, b*]: *а* = *х0 <х1* < ... < *хп = b* на *п* частичных сегментов [*х0*, *х1*], ..., [*хп‒1*, *хп*].Пусть ξ*i* ‒ точка [*хi‒1, хi*], Δ*хi* = *хi ‒ хi‒*1  ‒ длина сегмента. Δ=max Δ*хi*  ***О1****. Число I*{ *хi*, *ξi* }, *где*  *называется* ***интегральной суммой*** *f* (*х*)*, соответствующей данному разбиению Т сегмента* [*а, b*] *и данному выбору промежуточных точек ξi* *на частичных сегментах* [*хi‒1, хi*].  ***О2.*** *Число I называется* ***преде­лом интеграль­ных сумм*** *I*{ *хi*, *ξi* } *при* Δ*→*0, *если для ε >*0 Ǝ *δ=δ*(*ε*): *для разбиения Т сегмента* [*а, b*], *для которого* Δ=max Δ*хi < δ*, *независимо от выбора точек ξi* *на* [*хi‒1, хi*] *выполняется неравенство | I*{ *хi*, *ξi* } ‒ *I* *|< ε.*  ***О3.*** *Ф‒я f* (*х*) *называется интегрируе­мой* (*по Риману*) *на* [*а, b*], *если* Ǝ *конечный предел I интегральных сумм f* (*х*) *при* Δ*→*0. *Предел I ‒* ***определенный интеграл*** *от f* (*х*) *по* [*а, b*]*:*  ***Утв.*** *Неограниченная на* [*а, b*] *ф‒я f* (*х*) *не интегрируема на* [*а, b*]*.*  *Док‒во*. *f* (*х*)не ограничена на [*а, b*] => она не ограничена на некотором [*хk‒1, хk*] данного разбиения *Т* [*а, b*] *=>* слагаемое *f* (*ξk*)Δ*хi* в *I* { *хi*, *ξi*} можно сделать как угодно большим по модулю за счет выбора *ξk* => *I*{ *хi*, *ξi*} не ограничены => конечного предела интегральных сумм. •  Пусть *f* (*х*)огра­ничена на [*а, b*], *Т ‒* разбиение [*а, b*] точками *а* = *х0 <х1* < ... < *хп = b, Мi* и *mi ‒* ТВГ и ТНГ *f* (*х*) на [*хi‒1, хi*].  *Суммы называются* ***верхней и нижней сум­мами*** *f* (*х*) *для данного Т сегмента* [*а, b*].  Для *I*{ *хi*, *ξi* } разбиения Т сегмента[*а, b*]: *s ≤ I*{ *хi*, *ξi* } *≤ S.*  **Свойства верхних и нижних сумм**.  **1**°. *Для фиксированного разбиения Т и для ε >* 0 *точки ξi* (*ξi\**) *на* [*хi‒1, хi*] *можно выбрать так, что:*  0 *≤ S ‒ I*{ *хi*, *ξi* } < ε (0 *≤ I*{ *хi*, *ξi\** } ‒ s < ε).  Пусть *Т* ‒ некоторое фиксированное разбиение [*а, b*]. По опреде‒лению точной грани *Мi* для данного *ε >* 0 на [*хi‒1, хi*]Ǝ *ξi* :  0 *≤ Мi* ‒ *f(ξi)* < ε */(b‒a),* *i = 1,2,* ..... *п.* Умножая эти неравенства на Δ*хi* и складывая, получим 0 *≤ S ‒ I*{ *хi*, *ξi* } < ε.  **2**°. *Если разбиение Т' сегмента* [*а, b*] *получено путем добав­ления новых точек к точкам Т, то s ≤ s*', *S* ' ≤*S*.  Пусть к *Т* добавляется одна точка *х'* ∈ [*хi‒1, хi*], *‒* ТВГ *f* (*х*)на [*хi‒1*, *х'*]и [*х',* *хi*], ‒ длины сегментов =>. ТВГ на части [*хi‒1, хi*] не превосходит *ТВГ Мi* на всем сегменте=>  *=> => S* ' ≤ S. Для *s ≤ s*' ан‒но.  **3**°. *Пусть Т' и Т" ‒*  *разбиения* [*а, b*]. *Тогда: s*'≤ *S", s",≤* *S'.*  *s*' ≤ *S', s" ≤* *S".* Пусть *Т ‒* разбиение [*а, b*]:  *Т = Т'* U *Т",* а *S* и *s* ‒ верхняя и нижняя суммы разбиения *Т =>* по св‒ву 2°:  *s' ≤ s ≤ S ≤ S', s"≤ s ≤ S ≤ S" => s*' ≤ *S", s" ≤* *S'.* | **4**°. *Мн‒во* {*S*} *верхних сумм данной f* (*х*) *для всевозможных раз-биений* [*а, b*]  *ограничено снизу. Мн‒во* {*s*} *нижних сумм ‒ сверху.*  => из 3°. *S* ≥ некоторой фиксированной *s* => {S} ограни­чено снизу. s ≤ какой‒либо верх­ней суммы => {s} ограничено сверху.  Пусть ‒ ТНГ мн‒ва {S} верхних сумм, *I ‒* ТВГ множества {s} ниж­них сумм: . Числа ***верхний и нижний интегра­лы Дарбу*** *от f* (*х*)*.*  **.** Пусть => . Т.к ‒ точные грани => Ǝ S' и s" ‒ верхняя и нижняя суммы некоторых разбиений *Т'* и *Т"* сегмента [*а, b*]:  *.* Вычитая 2‒е неравенство из 1‒ого и учитывая => s" > S' => противоречит св‒ву 3°.  **5°**. *Пусть разбиение Т' сегмента* [*а, b*]  *получено из разбиения Т добавлением к последнему р новых точек, и пусть s', S'* и *s, S ‒* *нижние и верхние суммы разбиений Т' и Т. Тогда для разностей S ‒* *S* ' *и s'‒* s (они ≥ 0 по св‒ву **2**° ) *можно получить оценку, зависящую от максимальной длины* Δ *частичных сегментов разби­ения Т, числа р добавленных точек и ТВГ и ТНГ М и т ф‒и f* (*х*) *на* [*а, b*]: *S ‒* *S* ' ≤ (*M ‒ m*)*p*Δ*, s'‒* s≤ (*M ‒ m*)*p*Δ  Пусть к разбие­нию *Т* добавляется точка *х'* ∈ [*хi‒1, хi*], он разделится на [*хi‒1*, *х'*]и [*х', хi*]*, ‒* длины сегментов *=>* . Пусть *Мi,*  ТВГ *f(х)* на [*хi‒1, хi*], [*хi‒1*, *х'*]и [*х', хi*] *=>*  Далее, *т ≤ Мi' ≤ Мi ≤ М* и *т ≤ Мi'' ≤ Мi ≤ М* => *Мi ‒* *Мi' ≤ М ‒* *т* и *Мi ‒* *Мi'' ≤ М ‒* *т* =>  Это 1‒е неравенство св‒ва 5° при *р =* 1. Для нижних сумм ан‒но.  **6°**.***Лемма Дарбу****. Верхний и нижний интегралы Дарбу*   *от f* (*х*) *по* [*а, b*]  *являются с пре­делами*  *верхних и нижних сумм при* Δ→0.  Докажем:  1)*М = m*, т. е. *f* (*х*)= const => лемма оче­видна, т.к. S = = s.  2)*М* > *т.* Т.к. ‒ ТНГ {S} => для ε > 0 Ǝ *Т\** [*а, b*]:  S\* ‒ < ε/2. **(1)**  Пусть *р ‒* число точек *Т\*,* лежащих строго внутри [*а, b*]*.* Пусть *Т ‒* разбиение [*а, b*]: **(2)** и S ‒ верхняя сумма *Т*. Добавим к *Т* внутренние точки *Т\* =>* получим разбие­ние *Т',* верхняя сумма S' которого по св‒ву 5° и условию (2):  0 ≤ *S ‒* *S* ' ≤ (*M ‒ m*)*p*Δ< ε/2 **(3)**  Но *Т'* можно рассматривать как раз­биение, полученное в результате добавления к *Т\** внут­ренних точек *Т = >* по св‒ву 2°:  ≤ *S* ' ≤ S\* => 0 ≤ *S* '‒ ≤ S\*‒ => из (1): 0 ≤ *S* '‒ ≤ ε/2  Складывая это неравенство с (3), получим 0 ≤ *S* ‒ ≤ ε . **(4)**  Т.о., для ε > 0 Ǝ δ > 0 (см (2)): верхние суммы S разбиений *Т* сегмента [*а, b*]*,* для которых Δ < δ (см. (2)), удовлетворяют неравенству (4)=> верхний интеграл Дарбу является пределом верхних сумм. Для нижних сумм док‒во ан‒но. |

|  |  |
| --- | --- |
| **5. Необходимое и достаточное условие интегрируемости**.  Пусть *f* (*х*)задана на [*а, b*], *а < b*, *Т* ‒ разбиение [*а, b*]: *а* = *х0 <х1* < ... < *хп = b* на *п* частичных сегментов [*х0*, *х1*], ..., [*хп‒1*, *хп*].Пусть *ξi* ‒ точка [*хi‒1, хi*], Δхi = *хi ‒ хi‒*1  ‒ длина сегмента. Δ=max Δ*хi*  ***О1****. Число I*{ *хi*, *ξi* }, *где*  *называется* ***интегральной суммой*** *функции f* (*х*)*, соответствую‒щей данному разбиению Т сегмента* [*а, b*] *и данному выбору промежуточных точек ξi* *на частичных сегментах* [*хi‒1, хi*].  ***О2.*** *Число I называется* ***преде­лом интеграль­ных сумм*** *I*{ *хi*, *ξi* } *при* Δ*→*0, *если для ε >*0 Ǝ *δ=δ*(*ε*): *для разбиения Т сегмента* [*а, b*], *для которого* Δ=max Δ*хi < δ*, *независимо от выбора точек ξi* *на* [*хi‒1, хi*] *выполняется неравенство | I*{ *хi*, *ξi* } ‒ *I* *|< ε.*  ***О3.*** *Ф‒я f* (*х*) *называется интегрируе­мой (по Риману*) *на* [*а, b*], *если* Ǝ *конечный предел I интегральных сумм f* (*х*) *при* Δ*→*0. *Предел I ‒* ***определенный интеграл*** *от f* (*х*) *по* [*а, b*]*:*  Пусть *f* (*х*)огра­ничена на [*а, b*], *Т ‒* разбиение [*а, b*] точками *а* = *х0 <х1* < ... < *хп = b, Мi* и *mi ‒* ТВГ и ТНГ *f (х)* на [*хi‒1, хi*].  *Суммы называются* ***верхней и нижней сум­мами*** *f* (*х*) *для данного Т сегмента* [*а, b*].  Для *I*{ *хi*, *ξi* } разбиения Т сегмента[*а, b*]: *s ≤ I*{ *хi*, *ξi* } *≤ S.*  Пусть ‒ ТНГ мн‒ва {S} верхних сумм, *I ‒* ТВГ множества {s} ниж­них сумм: . Числа ***верхний и нижний интегра­лы Дарбу*** *от f* (*х*)*.*  **.** Пусть => . Т.к ‒ точные грани => Ǝ S' и s" ‒ верхняя и нижняя суммы некоторых разбиений *Т'* и *Т"* сегмента [*а, b*]:  *.* Вычитая 2‒е неравенство из 1‒ого и учитывая => s" > S' => противоречит св‒ву ( *Пусть Т' и Т" ‒*  *разбиения* [*а, b*]. *Тогда:*  *s*' ≤ *S", s" ≤* *S'.*)  ***Лемма Дарбу****. Верхний и нижний интегралы Дарбу*   *от f (х) по* [*а, b*]  *являются с пре­делами*  *верхних и нижних сумм при* Δ→0.  ***Т****. Чтобы ограниченная на* [*а, b*] *функция f* (*х*) *была интегрируемой на* [*а, b*]*, необходимо и достаточно, чтобы для* ε > 0 *нашлось такое разбиение Т сегмента* [*а, b*]*, для которого S ‒ s ≤ ε****.***  *1)* *Необходимость*. Пусть *f* (*х*)интегрируема на [*а, b*]*, I ‒* предел интегральных сумм *f* (*х*)=> для ε > 0 Ǝ δ=δ(ε), что для разбие-ния *Т,* где Δ < δ, независимо от выбора точек *ξi* на частичных сегментах выполняется: *| I*{ *хi*, *ξi* } ‒ *I* *|<* ε/4. **(1)**  Зафиксируем одно такое разбиение *Т.* По св‒ву 1° (*Для фиксиро‒ванного Т и для*  *ε>*0 *точки ξi* (*ξi\**) *на* [*хi‒1, хi*] *можно выбрать так, что* 0 *≤ S ‒ I*{ *хi*, *ξi* } < ε (0 *≤ I*{ *хi*, *ξi\** } ‒ s < ε) для данного *Т* можно указать такие 2 интегральные суммы, что  *S ‒ I*{ *хi*, *ξi*' } < ε/4, *I*{ *хi*, *ξi*'' } ‒ s < ε/4 **(2)**  Обе *I*{ *хi*, *ξi*' } и *I*{ *хi*, *ξi*'' } удовлет­воряют (1).  S ‒ s = (*S ‒ I*{ *хi*, *ξi*' }) + (*I*{ *хi*, *ξi*' } ‒ *I*) + (*I ‒ I*{ *хi*, *ξi*'' })+ + (*I*{ *хi*, *ξi*'' } ‒ s) => учитывая (1) и (2): ***S ‒ s < ε***  *2) Достаточность*. Для *Т*: и для ε > 0, по условию теоремы, Ǝ *T*: *S ‒ s ≤ ε* =>  *=>* в силу произвольности ε: . Докажем, что число *I* является пределом интегральных сумм *f* (*х*)*.* По лемме Дарбу это число *I* *‒* общий предел при Δ*→*0 верхних и нижних сумм => для ε >0Ǝ δ: при Δ < δ: *I ‒* s < ε/2 и S ‒ *I* < *ε/2,* т. е. при Δ< δ, *S ‒ s* < ε, и s ≤ *I* ≤ S. Для *I*{ *хi*, *ξi* } данного *Т*: s ≤ *I*{ *хi*, *ξi* } ≤ S.  Т. о., при Δ < δ обе величины *I* и *I*{ *хi*, *ξi* } заключены между числами s и S, разность между которыми меньше ε => при Δ < δ:  *| I*{ *хi*, *ξi* } ‒ *I* *|<* ε => число *I* есть предел интегральных сумм.  **Иная форма необх. и достаточного условия интегрируемости**.  Пусть *Мi* и *mi ‒* точные грани функции *f* (*х*)на сегменте [*хi‒1, хi*]. Число ωi = *Мi* ‒ *mi* ≥ 0 ‒ *колебание функции f* (*х*)на [*хi‒1, хi*]*.*  Каждое слагаемое в последней сумме неотрицательно.  *Чтобы f* (*х*) *была интегрируемой на* [*а, b*]*, необходимо и достаточно, чтобы для* ε > 0 *нашлось такое разбиение Т сегмента* [*а, b*]*, для которого* | **6. Классы интегрируемых функций**  ***О****. Ф‒я f* (*х*) *называется* ***равномерно не­прерывной*** *на* {*х*}, *если для* ε > 0 Ǝδ= δ(ε) >0: *для х', х"* ∈{*х*}:| *х" ‒* *х'* | < δ, *выполняется* |*f* (*х"*) ‒*f* (*х'*) | < ε.  ***Т1.*** *Непрерывная на* [*а, b*] *f* (*х*) *равномерно непре­рывна на* [*а, b*] *.*  ***Сл.*** *Пусть f* (*х*) *непрерывна на* [*а, b*] *.Тогда для* ε > 0 Ǝδ > 0:  *на* [*c, d*]∈[*а, b*]: *d ‒* *с <* δ, *колебание f* (*х*)ω = *М* ‒ *m <* ε (*М* и *m ‒* точные грани *f* (*х*)на сегменте [*c, d*]).  ***Т2****. Чтобы ограниченная на* [*а, b*]  *функция f* (*х*) *была интегри‒руемой на* [*а, b*]*, необходимо и достаточно, чтобы для* ε > 0 Ǝ *разбиение Т сегмента* [*а, b*]*, для которого S ‒ s ≤ ε****.***  ***Т3.*** *Непрерывная на* [*а, b*] *функция f* (*х*) *интегрируема на* [*а, b*] *.*  *Док‒во*. Пусть дано ε > 0. В силу равно­мерной непрерывности  *f* (*х*) на [*а, b*]для ε */*(*b ‒* *а*)>0Ǝ δ > 0, что при раз­биении *Т*  [*а, b*]на частичные сегменты [*хi‒1, хi*], длины которых Δ*хi* < δ, колебание *f* (*х*)на [*хi‒1, хi*] ωi = *Мi* ‒ *mi* < ε */*(*b ‒* *а*)(по следствию из Т1) => для таких разбиений *Т*  => по Т2 *f* (*х*)интегрируема.  ***Т4.*** *Если функция f* (*х*) *определена и ограничена на* [*а, b*] *и если для ε>0 можно указать конечное число интервалов, покрывающих все точки раз­рыва этой функции и имеющих общую сумму длин меньше* ε, *то f* (*х*) *интегрируема на* [*а, b*]*.*  *Док‒во.* Пусть дано ε > 0. Покроем точки разрыва *f* (*х*)конечным числом интервалов, сумма длин которых меньше ε /2(*М ‒ т*)*,*  *M* и *m ‒* ТВГ и ТНГ *f* (*х*)на [*а, b*]. Точки сегмента, не принад­лежащие указанным интервалам, образуют множество, состоящее из конечного числа непересекающихся сегментов. На каждом из них *f* (*х*)непрерывна => равномерно непрерывна. Разобьем каждый такой сегмент так, чтобы колебание *f* (*х*)на частичном сегменте разбиения ω*i* < ε */2*(*b ‒* *а*).Объединяя эти разбиения и интервалы, покрывающие точки разрыва функции *f* (*х*), мы получим разбиение *Т* всего [*а, b*].Для этого разбиения слагаемые суммы разделяются на две группы: 1)все слагаемые, отвечающие частям разбиения *Т,* образован­ным из интервалов, покрывающих точки разрыва, их колебания  ωi = *Мi* ‒ *mi* ≤ *M ‒ m* =>  2) остальные слагаемые: ωi < ε*/2(b ‒* *а)* =>  => по Т1 *f* (*х*)интегрируема.  ***Сл.*** *Ограниченная на* [*а, b*] *функция f* (*х*)*, имеющая лишь конечное число точек разрыва, интегрируема на этом сегменте. В частности, кусочно непрерывная на данном сегменте функция интегрируема на этом сегменте.*  Если *р* ‒ число точек разрыва, то достаточно покрыть каждую точку разрыва интервалом длины ε/2*р*  ***Т5.*** *Монотонная на* [*а, b*] *функция f* (*х*) *интегрируема на этом сегменте*.  *Док‒во.* Если функция монотонна на [*а, b*], то ее значения заключены между *f* (*a*)и *f* (*b*) *=>*функция ограничена на этом сегменте.Докажем тео­рему для неубывающей на [*а, b*]функции *f* (*х*) *.* Зададим ε > 0 и разобьем [*а, b*]на равные части, длины которых меньше ε /(*f* (*b*) *‒ f* (*a*)) и т.к. для неубывающей *f* (*x*): |

|  |  |
| --- | --- |
| **7. Основные свойства определенного интеграла. Оценки интегралов. Формулы среднего значения.**  **1°**. **2°.**  **3°**. Пусть *f* (*х*)и *g*(*х*)интегрируемы на [*а, b*]*.* Тогда *f* (*х*) + *g* (*х*)*,*  *f* (*х*)‒ *g* (*х*)и *f* (*х*) *g* (*х*)также инте­грируемы на [*а, b*], причем  *Док‒во.* При разбиении [*а, b*] и выборе точек *ξi* для:  = > т.к. Ǝ предел правой части, то Ǝ предел левой части =>  *f* (*х*)± *g* (*х*)интегрируема и верна (3).  *f* (*х*)и *g* (*х*)интегрируемы на [*а, b*] =>они ограничены на [*а, b*]:  | *f(х)*|≤ *А* и | *g(х)*|≤ *В.* Пусть *Т* ‒ заданное разбиение [*а, b*]*,*  *х'* и *х" ‒* произвольные точки [*хi‒1, хi*] => *f* (*х"*) *g*(*х"*) *‒ f* (*х'*) *g*(*х'*) *=*  *=* [ *f* (*х"*) *‒ f*(*х'*)] *g*(*х"*)*+*[ *g*(*х"*) *‒ g*(*х'*)] *f* (*х'*)  Т. к. | *f* (*х"*) *g*(*х"*) *‒ f* (*х'*) *g*(*х'*)| ≤ ωi, | *f* (*х"*) *‒ f*(*х'*) |≤ωi1,  | *g*(*х"*) *‒ g*(*х'*)| ≤ωi2, где ωi, ωi1, ωi2 ‒ колебания *f* (*х*) *g* (*х*)*, f* (*х*)*, g* (*х*)на [*хi‒1, хi*] => ωi ≤ *B*ωi1 + *A*ωi2 =>  *f* (*х*)и *g* (*х*)интегрируемы на [*а, b*] => для ε > 0 Ǝ разбиение *Т* :  => для этого *Т*: =>  *f* (*х*) *g*(*х*) *‒* интегри­руемая функция  **4°.** Если *f* (*х*)интегрируема на [*а, b*]*,* то *с f* (*х*)(*с* = const) тоже:  Т.к. интегральные суммы *f* (*х*)и *с f* (*х*)отлича­ются на const *с*  **5°**. Пусть *f* (*х*)интегрируема на [*а, b*].Тогда *f* (*х*)интегрируема на [*c, d*] [*а, b*]*.*  *Док‒во.*  *f* (*х*)интегрируема на [*а, b*] => для ε > 0 Ǝ разбиение *Т* [*а, b*]*,* что *S ‒ s ≤ ε****.*** Добавим к точкам *Т* точки *с* и *d.* В силу св‒ва 2° верхних и нижних сумм (*Если разбиение Т'* [*а, b*] *получено путем добав­ления новых точек к точкам Т, то s ≤ s*', *S* ' ≤ *S* ) для полученного разбиения *Т\** тем более справедливо неравенство *S ‒ s < ε****.*** Разбиение *Т\** сегмента [*а, b*]порождает разбиение *Т1* сегмента [*c, d*]*.* Если *S1* и *s1* ‒ верхняя и нижняя суммы разбиения *Т1,* то *S1 ‒ s1* ≤ *S ‒ s*, т.к. каждое слагаемое ωiΔ*хi >0* в выражении *S1 ‒ s1* = Σ ωiΔ*хi* будет также слагаемым в выра-жении для *S ‒ s=> S1 ‒ s1* < ε => *f* (*х*) интегрируемана [*c, d*]*.*  **6°**. Пусть *f* (*х*)интегрируема на сегментах [*а, c*]и [*c, b*]*.* Тогда *f* (*х*)интегрируема на [*а, b*],причем  1)*а* < *с < b. f* (*х*)интегрируема на [*а, c*] и [*c, b*] => Ǝ такие разбиения этих сегментов, что *S ‒ s < ε*/2 для каждого из них. Объединяя эти разбиения, мы получим разбиение [*а, b*]*,* для которого *S ‒ s < ε* ***=>*** *f* (*х*)интегрируема на [*а, b*]*.* Будем включать точку *с* в число делящих точек при разби­ении [*а, b*]=> интегральная сумма для *f*(*х*)на [*а, b*]равна сумме ин­тегральных сумм для этой функции на [*а, c*] и [*c, b*] *=>*в пределе получим (5).  2)точка *с* лежит вне сегмента [*а, b*] => сегмент [*а, b*]есть часть сегмента [*а, c*] или [*c, b*] => по св‒ву 5° *f* (*х*)интегрируема на [*а, b*]*.* Пусть *а* < *b* < *с.* Тогда  => по св-ву 2° получим (5). Для *с* < *а* < *b* аналогично*.*  **Оценки интегралов.**  **1**° . *Пусть интегрируемая на* [*а, b*] *функция f* (*х*) *≥* 0 *на* [*а, b*] =*>*  интегр. сумма ≥ 0 => предел интегр. сумм ≥ 0 .  ***З1*** . *Если f* (*х*) *интегрируема на* [*а, b*] *и f* (*х*) *≥* *т, то*  *f* (*х*) *‒ т ≥* 0 и интегрируема на [*а, b*] => => по св.3°: | **2°**. *Если*  *f* (*х*) *непрерывна, неотрицательна и на* [*а, b*], *то*  *f* (*х*)неотрицательна и => на [*а, b*] Ǝ ξ: *f* (*ξ*) = *2k* > 0 => по теореме об устойчивости знака непре­рывной функции Ǝ [*р, q*],  ξ ∈ [*р, q*] и в пределах [*р, q*] *f* (*х*) *≥ k* > 0 => по З1:  По св‒ву 6°  => т.к. *f* (*х*) *≥0* и получаем (6)  **3°.** *Если f* (*х*) *и g*(*х*) *интегрируемы на* [*а, b*] *и f* (*х*) *≥* *g*(*х*) *на* [*а, b*]*, то*  Функция *f* (*х*) *‒ g*(*х*) *≥*  0 и интегрируема на [*а, b*] => (7) по св‒ву 1° *З2*. *Если f* (*х*) *интегрируема на* [*а, b*], *то* | *f* (*х*)| *также интегрируема на* [*а, b*]*, причем*  Пусть *Мi* и *mi ‒* точные грани *f* (*x*)*, Мi'* и *mi' ‒* точные грани | *f* (*x*)| на [*хi‒1, хi*]. Легко убедиться, что *Мi'* ‒ *mi' ≤ Мi* ‒ *mi* (рассмотреть cлучаи: 1) *Мi ,* *mi* ≥ 0, 2) *Мi ,* *mi* ≤ 0, 3) *Мi >0,* *mi* ≤ 0 ) => *S1 ‒ s1* ≤ *S ‒ s* => если для некоторого разби­ения  *S ‒ s < ε*, то для него *S1 ‒ s1* *< ε**=>* |*f(x)* | интегрируема.  ‒| *f* (*х*)| ≤ *f* (*х*) ≤ | *f* (*х*)*)*| =>  => (8)  **4**°. *Пусть f* (*х*)и *g*(*х*) *интегрируемы на* [*а, b*] *и g* (*х*) ≥ 0. *Тогда, если М и т ‒* *точные грани*  *f* (*х*) *на* [*а, b*]*, то*:  => из того, что для *х* ∈ [*а, b*] : *т g* (*х*) *≤ f* (*х*) *g* (*х*) *≤ М g(х)* и оценки 3° и св-ва 4°.  **1‒я формула среднего значения**. *Пусть f* (*х*) *интегрируема на*  [*а, b*] *и пусть т и М ‒ точные грани f* (*х*) *на* [*а, b*]*. Тогда* Ǝ *μ, где*  *т ≤ μ ≤ М, что*  В (9) положим *g*(*x*) = 1 и учитывая, что =>  Обозначим => получим (10).  Если  *f* (*х*) *непрерывна* на [*а, b*], то Ǝ *р,* *q* ∈[*а, b*], что  *f* (*p*) = *m* и  *f* (*q*) *= М* (по 2‒й теореме Вейерштрасса) => по теореме о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение Ǝ ξ ∈ [*p, q*] (=>ξ ∈ [*а, b*]) : *f* (*ξ*) = μ => (10) примет вид  ***1‒й формулы среднего значения***:  **1‒я формула среднего значения в обобщенной форме (13)**. *Пусть f* (*х*) *и g*(*х*) *интегрируемы на* [*а, b*] *и т и М ‒ точные грани f* (*х*) *на* [*а, b*]*. Пусть g*(*х*) *≥* 0 *(или g(x) ≤* 0) *на всем* [*а, b*]*. Тогда* Ǝ *μ*, *где т ≤ μ ≤ М, что*  *Если f* (*х*) *непрерывна на* [*а, b*]*, то* Ǝ ξ ∈ [*а, b*]:  Если => в силу (9), => в качестве μможно взять число. Если => разделив все части неравенств (9) на *,* получим  => получим (12).  Если *f* (*х*)непрерывна на [*а, b*]*,* то для μ, где *т ≤ μ ≤ М*,  Ǝ ξ ∈ [*а, b*]: *f* (*ξ*) = μ => (12) переходит в (13).  **2‒я формула среднего значения (***формула Бонне*)**.** *Если на* [*а, b*] *функция g*(*х*) *монотонна, а f* (*х*) *интегрируема, то* Ǝ ξ ∈ [*а, b*]: |

|  |  |
| --- | --- |
| **8. Основная формула интегрального исчисления. Формулы замены переменного и интегрирования по частям.**  Пусть *f* (*х*)интегрируема на сегменте, содержа­щемся в (*а, b*)и *с ‒* некоторая фиксированная точка (*а, b*). Тогда для *х* ∈(*а, b*) *f* (*х*)интегрируема на [с, *х*] => на (*а, b*)определена функция  ‒ ***интеграл с переменным верх. пределом****.*  ***Т1.*** *Любая непрерывная на интервале* (*а,* *b*) *функ­ция f* (*х*) *имеет на этом интервале первообразную. Одной из пер­вообразных является ф‒я , где с ‒*  *фиксированная точка из* (*а,* *b*).  *Док‒во.* Достаточно доказать, что для фиксированного *х* ∈ (*а,* *b*)  Ǝ предельное значение  По св‒ву 6° определенных интегралов:  где ξ ‒ число между числами *х* и *х* + Δ*x*. *f* (*х*)непрерывна в точке *х =>*  при Δ*x→*0 *f* (*ξ*)*→f* (*x*) *=>*  ***З1***. Аналогично доказывается теорема о сущест­вовании первообразной у непрерывной *на сегменте* [*а, b*] функции, а в качестве нижнего предела интегриро­вания *с* можно взять *а.*  ***З2***. При док‒ве Т1 устано­влено существование производной от интеграла с переменным верх­ним пределом и доказано, что эта производная равна подынтеграль­ной функции  ***З3***. Если *f* (*х*)интегрируема на сегменте, содержащемся в (а, *b*)*,* то интеграл с переменным верхним пределом является непрерыв-ной на (а, *b*)функцией от верхнего предела. Докажем, что прира-щение Δ*F*= *F* (*х* +Δ*x*) ‒ *F*(*х*)функции стремится к нулю при Δ*x→*0. В силу :  ,  где число μ лежит между ТВГ и ТНГ гранями *f* (*х*)на [*х*, *х*+Δ*x*] => Δ*F→0* при Δ*x→*0. | **Основная формула интегрального исчисления.** Любые 2 первообразные данной *f* (*х*)отличаются на постоянную => согласно Т1 и З1, можно утверждать, что первообразная Ф (*х*) непрерывной на [*а, b*] функции *f* (*х*)имеет вид:  где *С ‒* некоторая постоянная.  Полагая в этой формуле сначала *х = а,* а затем *х = b* и используя св‒во 1° определенных интегралов:  это ***основная формула интегрального исчисления***(*формула Ньютона* —*Лейбница*).  **Замена переменной под знаком определенного интеграла.**  Пусть выполнены условия:  1) *f* (*х*) *непрерывна на* [*а, b*]  2) [*а, b*] *является множеством значений некоторой функции*  *х* = *g*(*t*) , *определенной на* α ≤ *t* ≤ β *и имеющей на этом сегменте непрерывную производную;*  3) *g*(*α*)*=a*, *g*(*β*) *= b.*  *Тогда справедлива формула замены переменной под знаком определенного интеграла:*  Рассмотрим некоторую первообразную Ф(*х*)функции *f* (*х*)*.* По (1):  Т.к. Ф(*х*)и *х = g*(*t*)дифф-мы на соответ­ствующих сегментах, то сложная функция Ф( *g* (*t*)) диф-ма на [α, β] =>  причем Ф' вычисляется по аргументу *х:* Ф'(*g*(*t*)) = Ф'(*х*)*,* где  *х = g*(*t*). Т.к. Ф'(*х*) *= f* (*х*) *=>* Ф'(*g*(*t*)) = *f* (*g*(*t*)) *=>*  => Ф(*g*(*t*))*,* определенная и непрерывная на [α, β], является на [α, β] первообразной для *f* (*g*(*t*))*g*'(*t*)=> из (1) и *g*(*α*)*=a*, *g*(*β*) *= b*  Сравнивая последнюю формулу с (3), получаем (2).  **Формула интегрирования по частям.** *Пусть и* (*х*) *и v* (*х*) *имеют непрерывные производные на* [*а, b*]. *Тогда:*  *и* (*х*)*v* (*х*)является первообразной для *и* (*х*)*v'* (*х*)+ *v* (*х*) *и'* (*х*) *=>* в силу (1):  => по св‒ву 3° определенных интегралов получим (4) и (5). |

|  |  |
| --- | --- |
| **9. Понятие длины плоской кривой. Формулы для вычисления длины дуги кривой.**  Пусть *φ* (*t*)и *ψ* (*t*) непрерывны на [α, β]. Если рассматривать *t* как время, то эти функции определяют закон дви­жения по плоскости точки *М* с коорд‒тами: *x* = *φ*(*t*)*, y =* *ψ*(*t*)*, α ≤ t ≤ β* **(1)**  *Мн‒во* {*М*} *всех точек М, координаты х и у которых определяют‒ся уравнениями* (1), *называется* ***простой плоской кривой*** *L, если различным значениям параметра t из* [α, β] *отвечают различные точки этого мн‒ва.*  ***Простая замкнутая кривая L =*** L1 L2, где L1 и L2 ‒ 2 простые кривые: 1) их граничные точки совпадают; 2) их не граничные точки различны.  Пусть мн‒во {*t*} ‒ сегмент | полусегмент | интервал | чис­ловая прямая | открытая или замкнутая полупрямая.  Разбиение {*t*}: конечная или бесконечная система сегментов  {[*ti‒1, ti*]} разбивает {*t*}, если: 1) объединение всех сегментов ‒ все множество {*t*}; 2) общие точ­ки двух сегментов - лишь их концы.  ***Параметрическое задание кривой***. Пусть *φ*(*t*)и *ψ*(*t*)непрерывны на {*t*}. *Уравнения x*  = *φ*(*t*)*, y =*  *ψ*(*t*) *задают* ***параметрически*** *кривую L, если* Ǝ *такая система сегментов* {[*ti‒1, ti*]}, *разбивающих множество* {*t*}, *что для значений t* *из каждого данного сегмента этой системы эти уравнения определяют простую кривую.*  **Длина дуги кривой**. Пусть кривая L задается параметрически уравнениями *x*  = *φ*(*t*)*, y =*  *ψ*(*t*)*,* где *t* изменяется на [α, β].  Пусть *Т ‒* разбиение [α, β] точками α = *t*0 < *t1* < *t*2 < ... < *tn =* β. *М0, М1, М2,* ..., *Мn -* соответствующие точки кривой *L*=> ломаная *М0М1М2 ... Мп* вписана в кривую L и отвечает данному разбиению *Т*. Длина *li* звена  *Мi‒1 Мi =*  =>длина всей ломаной  ***О1.*** *Если мн‒во* {*l* (*ti*)} *длин вписанных в кри­вую L ломаных, отвечающих всевозможным разбиениям Т сегмента* [α, β], *ограничено, то кривая L называется* ***спрямляе­мой****, а ТВГ l мн‒ва* {*l* (*ti*)} *называется* ***длиной дуги*** *кривой L*.  ***Лемма.*** *Пусть l\**(*ti*) ‒ *длина ломаной, вписанной в кривую L и отвечающей разбиению Т\* сегмента* [α, β], *l*(t*i*) *‒* *длина лома­ной, вписанной в кривую L* *и отвечающей разбиению Т, получен­ному из разбиения Т\* посредством добавления нескольких новых точек. Тогда l\**(*ti*) ≤ *l* (*ti*).  *Док‒во.* Пусть к *Т\** добавляется 1 точка γ. Ломаная, отвечающая *Т,* отличается от ломаной, отвечающей *Т\*,*  тем, что 1 звено *Мi‒1 Мi* заменяется двумя звеньями *Мi‒1 C* и *СМi*. Т.к. длина стороны  *Мi‒1 Мi* треугольника *Мi‒1 CМi* не превосходит суммы длин двух других его сторон, то *l\**(*ti*) ≤ *l*(*ti*).  **Достаточные условия спрямляемости кривой.**  ***Т1.*** *Если x*  = *φ*(*t*)*, y =*  *ψ*(*t*) *имеют на* [α, β] *непрерывные производ-ные, то кривая L, определяе­мая параметрическими уравнениями* (1), *спрямляема и длину L ее дуги можно вычислить по формуле*  *Док‒во.* 1)Докажем, что кривая *L* спрям­ляема.  *x*  = *φ*(*t*)*, y =*  *ψ*(*t*) имеют на [α, β] производные => по Т. Лагранжа:  Подставим в (2):  Т.к. производные *φ*(*t*)*,*  *ψ*(*t*)непрерыв­ны => эти производные ограничены => Ǝ*М* : для *t* ∈[α, β]: | φ' (t) | ≤ *М* и | ψ' (t) | ≤ *М* => из (4)  => мн‒во {*l* (*ti*)} длин вписанных в L лома­ных, отвечающих всевозможным *Т* сегмента [α, β], ограничено => *L* спрямляема*.*  2)Пусть *l* ‒ длина L. Правая часть (4) похожа на интегр. сумму  интегрируемой функции , причем эта отвечает разбиению *Т* сегмента [α, β] и данному выбору точек τi на [*ti‒1, ti*]. | *Докажем* : *для* ε > 0 Ǝδ > 0, *что при* Δ < δ (Δ = max Δ*ti*):  | *l* (*ti*) *‒ I*| < ε/2 **(6)**  где ‒ предел при Δ→ 0 интеграль-ных сумм (5). Т.е., *докажем, что при достаточно «мел­ких» разбиениях Т сегмента* [α, β] *длины l* (*ti*) *ломаных, вписанных в L*, *и отвечающих этим разбиениям, как угодно мало отли­чаются от интеграла I,* стоящего в правой части (3).  где *Мi* и *mi* ‒ точные грани *ψ* '*(t)* на [*ti‒1, ti*]. В силу (4), (5) и (7):  где S и s ‒ верхняя и нижняя суммы *ψ* '(*t*) для разбиения [α, β]. Т. к. ф‒и и *ψ*'*(t)* интегри­руемы на [α, β] (это => из непрерывности *φ* '(*t*) и *ψ* '(*t*) на [α, β]), то из определения интегрируе­мости и из теоремы (*Чтобы ограниченная на* [*а, b*]  *f* (*х*) *была интегрируемой на* [*а, b*]*, необходимо и достаточно, чтобы для* ε > 0 Ǝ *Т сегмента* [*а, b*]*, для которого* ***S ‒ s ≤ ε***) => что для ε > 0 Ǝ δ > 0, что при Δ < δ (Δ = max Δ*ti*) выполняются :  *| I*{ *ti*, *τi* } ‒ *I* *|< ε/4* и *S ‒ s < ε/4* **(9)**  => при Δ < δ в силу (8) и (9):  | *l(ti) ‒ I*| = | *l(ti) ‒ I*{ *ti*, τ*i* }+ *+ I*{ *ti*, τ*i* } *‒ I*| ≤  ≤ | *l(ti) ‒ I*{ *ti*, τ*i* }| *+*| *I*{ *ti*, τ*i* } *‒ I*| ≤ *ε/4+ ε/4 = ε/2* => (6) 3)Докажем, что *среди всевозможных ломаных, длины l* (*ti*) *которых удовлетворяют* (6), *имеются ломаные, длины которых отличаются от длины l дуги кривой L меньше чем на ε/2.*  Т. к. *l* ‒ ТВГ {*l* (*ti*)} длин лома­ных, вписанных в L*,* и отвечающих всевозможным разбиениям [α, β], то Ǝ *Т\** сегмента, что длина *l*\**(ti)* соответствующей ломаной : 0 ≤ *l ‒ l*\**(ti)* < *ε/2* **(10)***.*  Разобьем каждый [*ti‒1, ti*] разбиения *Т\** на столь мелкие части, чтобы максимальная длина разбие­ния полученного объединением указанных разбие­ний была Δ < δ. Длина *l*(*ti*) ломаной, отвечающей разбиению *Т,* удовлетворяет (6). Т.к. вершины ломаной, отвечающей разбиению *Т\*,* являются также вершинами ломаной, отвечающей разбиению *Т,* то по лемме:  0 < *l*\*(*ti*) *≤ l* (*ti*) *≤ l =>* в силу (10): 0 ≤ *l ‒ l* (*ti*)< *ε/2*  **(11)**  Из (6) и (11) => |*l ‒ I*| < ε => в силу произвольности ε => *l* = *I*.  **Замечание.** *Если кривая L* *является графиком функции у = f* (*х*)*, имеющей на* [*a, b*] *непрерывную производную f* '*(х), то кривая L спрямляема и длина l дуги L, может быть най­дена по формуле*  График этой функ­ции ‒ кривая, определяемая уравнениями *х* = *t,*  *у = f* (*t*)*, a ≤ t ≤ b* и вы­полнены все условия Т1=> полагая в (3) *φ*(*t*)*=t, y =* *f* (*t*) и заменяя *t* на *х,* мы получим (12).  *Если кривая L определяется полярным уравнением r = r* (*θ*)*,*  *θ1 ≤ θ ≤ θ2 и r*(*θ*)  *имеет на* [*θ1, θ2*] *непрерывную про­изводную, то кривая L спрямляема и длину l дуги L можно найти по формуле*  Для док‒ва перейти от поляр­ных координат к декартовым:  *x = r*(*θ*)*cosθ, y = r*(*θ*)*sinθ ‒* это параметри­ческие уравнения, функции φ *= r*(*θ*)*cosθ, ψ = r*(*θ*)*sinθ* удовлетворяют условиям Т1. Подставляя их в (3), получим (13). |

|  |  |
| --- | --- |
| **10. Понятие квадрируемости плоской фигуры. Площадь криволинейной трапеции и криволинейного сектора.**  *Плоская фи­гура Q ‒* части плоскости, ограниченная простой замкнутой кри­вой L. Кривая L ‒ граница фигуры *Q*. *Многоугольник ‒* часть плоскости, ограниченная простой замкнутой ломаной линией. Многоугольник ***вписан***в фигуру *Q,* если точка этого многоугольника принадлежит *Q* или ее границе. Если все точки плоской фигуры и ее границы принадлежат некоторому многоугольнику, то указанный многоугольник ***описан*** вокруг Q. Площадь вписанного в Q многоуголь­ника не больше площади описанного вокруг Q многоугольника.  Пусть {Si} ‒ мн‒во площадей вписанных в *Q* многоугольников, а {Sd} ‒ мно‒во площадей описанных вокруг *Q* многоугольников. {Si} ограничено сверху (площадью описанного вокруг *Q* многоугольника), а множество {Sd} ограничено снизу (напр., 0). Пусть Р *‒* ТВГ {Si}, а ‒ ТНГ {Sd}.Р и ‒***нижняя и верхняя площадь*** *Q.*  **Р ≤ .** Пусть Р ≥ => полагая и по определению точных граней, Ǝ вписанный в *Q* многоугольник, площадь Si которого будет больше числа , т. е. , и описанный вокруг фигуры Q многоугольник, площадь Sd которого меньше числа , т. е. => Sd < Si ‒ противоречие.  ***О.*** *Плоская фигура Q* *называется* ***квадрируемой****, если верхняя площадь этой фигуры совпадает с ее нижней площадью* Р *. Число* Р =Р = *называется* ***площадью Q****.*  ***Т1.*** *Чтобы плоская фигура Q* *была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы для* ε > 0 Ǝ *такие описанный и вписанные* *многоуголь­ник для Q*:Sd­ ‒ Si < ε.  *Док‒во.* 1) Необходимость. Пусть Q квадрируема, т. е. Р =Р = . Т.к. Р и ‒ ТВГ и ТНГ для {Si} и {Sd}, то для числа ε > 0  Ǝ вписанный в *Q* многоугольник: Р ‒ Si < ε/2, и описанный:  Sd ‒ Р < ε/2 => Sd­ ‒ Si < ε.  2) Дост‒сть. Пусть Sd­ и Si ‒ площади многоугольников, для которых Sd­ ‒ Si < ε. Т.к. Si ≤ Р ≤ ≤ Sd, то ‒ Р < ε. Т.к. ε произвольно => Р = => фигура квадрируема.  *Граница плоской фигуры* Q *имеет пло­щадь, равную* 0*,* если для  ε > 0 для Q Ǝ описанный и вписанный многоугольники, разность площадей которых: Sd­ ‒ Si < ε => Т1: *чтобы плоская фигура Q была квадрируемой, необ­ходимо и достаточно, чтобы ее граница имела площадь, равную* 0*.* | ***Криволинейной трапецией***(КТ) называется фигура, ограниченная графиком заданной на [*а, b*] непрерывной и неотрицательной функции *f* (*х*)*,* орди­натами, проведенными в точках *a* и *b*, и отрезком оси *Ox* между точками *а* и *b*.  *Криволинейная трапеция ‒ квадрируемая фи­гура, ее площадь*  *Док‒во*. Т. к. непрерывная на [*а, b*] функция интегрируема, то для  ε > 0 Ǝ разбиение *Т* сегмента [*а, b*]: S ‒ s < ε, где S и s ‒ верхняя и нижняя суммы разбиения *Т.* Но S = Sd­ и s = Si, где Sd­ и Si ‒ площади ступенча­тых фигур, 1‒я из которых содержит КТ, 2‒я содержится в КТ => Sd­ ‒ Si < ε => по Т1 КТ квадрируема. Т.к. lim при Δ→ 0 (Δ=maxΔ*ti*)верхних и нижних сумм равен и s ≤ Р ≤ S, то площадь КТ можно найти по (1).  Пусть кривая *L* задана в полярной системе координат *r = r* (*θ*)*,*  *α ≤ θ ≤ β*, и функция *r*(*θ*)непрерывна и неотрицательна на [*α, β*]. Плоская фигура, ограниченная кривой *L* и двумя лучами, составляющими с полярной осью углы α и β, называется ***криволинейным сектором***(КС)*.*  *Криволинейный сектор ‒ квадрируемая фигура, его площадь*  *Док‒во.* Рассмотрим разбиение *Т* сегмента [*α, β*] точками α = θ0 < θ1 < ... < θn = β и для каждого [*θi‒1, θi*] построим круговые секторы, радиусы кото­рых равны минимальному *ri* и максимальному *Ri* значениям *r(θ )*на [*θi‒1, θi*] => получим две веерообразные фи­гуры, 1‒я из которых содержится в КС, а 1‒я содержит КС. Их площади  1‒я сумма ‒ нижняя сумма s для функции ½*r2*(*θ*) для разбиения *Т* сегмента [*α, β*], 2‒я сумма ‒ верх­няя сумма S. Т.к. ф-я ½ *r*2(*θ*) интегри­руема на [*α, β*], то разность S ‒ s = *‒*  мо­жет быть как угодно малой => для ε > 0 эта разность может быть S ‒ s = *‒ <* ε/2. Впишем во внутрен­нюю веерообразную фигуру многоугольник Qi с площадью Si, для которого ‒ Si < ε/4, и опишем вокруг внешней веерообраз­ной фигуры многоугольник Qd с площадью Sd, для которого Sd ‒ *<* ε/4. 1‒й ‒вписан в КС, 2‒й ‒ описан КС. Т.к.  то Sd ‒ Si < ε => т.к. ε произвольно, КС квадрируем. Из (3) => (2) |

|  |  |
| --- | --- |
| **11. Понятие кубируемости (объем тела). Кубируемость некоторых классов тел.**  Пусть *Е ‒* некоторое конеч­ное тело (тело ‒ часть пространства, ограниченная замкнутой непересекающейся поверхностью). Пусть {*Vi* } *‒* мн*‒*во объемов вписанных в *Е* многогранников, а {*Vd* } *‒* мн*‒*во объемов описанных *Е* многогранников. {*Vi* } ограничено сверху (объемом описанного многогранника), {*Vd* }ограничено снизу (например, 0).  Пусть *V ‒* ТВГ {*Vi*} , ‒ ТНГ {*Vd* }*.* Числа *V* и называются *нижним*  и *верхним* объемом тела *Е.*  **V ≤ .** Пусть V ≥ => полагая и учитывая определение точных граней, Ǝ вписанный в Е многогранник, объем Vi которого будет больше числа , т. е. , и такой описанный вокруг Е многогранник, объем Vd которого меньше числа , т. е. => Vd < Vi ‒ противоречие, т.к. объем любого описан­ного многогранника *не меньше* объема любого вписанного.  ***О.*** *Тело Е называется* ***кубируемым****, если верх­ний объем этого тела совпадает с нижним объемом V. Число V =* = *V называется* ***объемом тела Е****.*  ***Т1.*** *Чтобы тело Е было кубируемым, необ­ходимо и достаточно, чтобы для тела Е для ε < 0* Ǝ *описанный и впи­санный многогранники, разность объемов которых* Vd *‒* Vi *<* *ε.*  *Док‒во.* 1) Необходимость. Пусть тело Е кубируемо, т. е. *V =* = *V*. Т.к. *V* и ‒ ТВГ и ТНГ {Vi } и { Vd }, то для ε > 0  Ǝ вписанный в Емногогранник, объем Vi которого: *V* ‒ *Vi* < ε/2; и Ǝ описанный многогранник, объем Vd которого: Vd ‒ V< ε/2. Складывая, получим Vd­ ‒ Vi < ε.  2) Дост‒сть. Пусть Vd­ и Vi ‒ объемы многогранников, для которых Vd­ ‒ Vi < ε. Т.к. Vi ≤ V ≤ ≤ Vd, то ‒ V < ε. Т.к. ε произвольно => V = => тело кубируемо.  **Цилиндр** ‒ это тело, ог­раниченное цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными некоторой оси, и двумя плоско­стями, перпендикулярными этой оси. Эти плоскости в пересечении с цилиндрической поверхностью образуют плоские фигуры, назы­ваемые *основаниями* цилиндра, а расстояние *h* между основаниями цилиндра называется *высотой* цилиндра.  ***У1.*** *Если основанием цилиндра Е является квадрируемая фигура Q, то цилиндр является кубируемым телом, и его объем: V = Рh, где Р ‒* *площадь основания Q, h ‒ высота цилиндра.* | *Док‒во.* Так как Q квадрируема, то для ε > 0 можно указать такие описанный и вписанный в эту фигуру многоугольники, разность их площадей Sd­ ‒ Si < ε/*h*. Объемы Vd­ и Vi призм с высотой *h,* основаниями которых служат эти многоугольники, равны *Sd­ h* и  *Si h* => Vd­ ‒ Vi =(*Sd* ‒ *Si* )*h <*( ε/*h*)*h = ε*. Т.к. эти при­змы являются соответственно описанным и вписанным в *Е* многогранниками, то по Т1 тело *Е* кубируемо. Т.к. Vi ≤ *Ph* ≤ Vd*,* то объем цилиндра V=*Рh.*  Из У1 => *кубируемость ступенча­тых тел* (**ступенчатым телом** называется объединение конечного числа цилиндров, расположен‒ных так, что верхнее основание ка­ждого предыдущего цилиндра находится в одной плоско­сти с нижним основанием следующего).  ***Замечание.*** *Если для*  *ε > 0 можно указать такое описанное вокруг тела Е ступенчатое тело и такое вписанное в Е ступенчатое тело, разность объемов которых* Vd *‒* Vi *<* *ε*, *то тело Е кубируемо.*  ***Криволинейной трапе­цией***(КТ) называется фигура, ограниченная графиком заданной на сег­менте [*а, b*] непрерывной и неотрица-тельной функции *f* (*х*)*,* орди­натами, проведенными в точках *a* и *b*, и отрезком оси *Ox* между точками *а* и *b*.  ***Утверж­дение 2.*** *Пусть функция у* = *f* (*х*) *непрерывна на* [*а, b*]. *Тогда тело Е, образованное вращением вокруг оси Ох криволинейной тра­пеции, кубируемо и его объем*  *Док‒во.* Пусть *Т ‒* разбиение [*а, b*] точками *а* = *х0 <х1* < ... < *хп = b, Мi* и *mi ‒* ТВГ и ТНГ *f* (*х*)на [*хi‒1, хi*]. На каждом [*хi‒1, хi*] построим два пря­моугольника с высотами *тi* и *Мi.* Получим две ступенчатые фигуры, 1‒я содержится в КТ, 2‒я содержит ее. При вращении КТ и этих ступенчатых фигур мы получим тело *Е* и два ступенчатых тела, одно из которых содержится в *Е,* а другое содержит *Е.* Объемы этих ступенчатых тел:  Эти выражения являются верхней и нижней суммами для функции *π f 2(х).* Т.к. эта функция интегрируема, то разность этих сумм для некоторого *Т* сегмента [*а, b*] будет меньше данного *ε > 0* => тело *Е* кубируемо. Т.к. предел указанных сумм равен*,* то объем тела *Е* можно найти по (1). |

|  |  |
| --- | --- |
| **12. Абсолютная сходимость несобственных интегралов. Формулы замены переменного и интегрирования по частям для несобственных интегралов.**  Пусть *f* (*х*)определена на *a≤ x<*+∞ и для *А* (*A≥a*)Ǝ определенный интеграл Римана  ***О1.*** *Предел*  *в случае, если он* Ǝ*, называется* ***несобственным интегралом 1‒го рода*** *от f* (*х*) *по полупрямой* [*а,* +∞) *и* *обозначается*  *При этом говорят, что НСИ* (3) *схо­дится:*  *Если предела* (2) *, то НСИ* (3) *расходится.*  НСИ по ‒∞< *x ≤ b* и по всей прямой:  при независимом друг от друга стремлении *А' →*‒∞ и *А" →* +∞. Из этих определений =>  1)если для некоторого *а* сходится каждый из НСИ и *,* то сходится и *,* причем:  2) если сходится НСИ и *b* ‒ число, *b >* *а,* то сходится *,* причем  Для существования предель­ного значения функции *F*(*А*)при *А →* +∞ необходимо и дос­таточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши: для ε > 0 Ǝ *В>а,* для *А1* и *A2*: *А1* >*B,* *A2* >*В,* выполняется  => справедливо У1.  ***У1***(критерий Коши сходимости НСИ). *Для сходимости НСИ*  *необходимо и достаточно, чтобы для* ε>0 Ǝ *В>а, для А1 и* *A2,* : *А1* >*B,* *A2* >*В:*  Пусть *f* (*х*)задана на  *a≤ x<*+∞ и для *А ≥ а* Ǝинтеграл  ***У2*** (общий признак сравнения). *Пусть на полупрямой a≤ x<*+∞ |*f(x)| ≤ g(x). Тогда из сходимости интеграла вытекает сходимость*  *Док‒во.* Пусть сходится => по кр-рию Коши, для  ε>0 Ǝ *В>а,* что для *А1>В* и *A*2>В :  Согласно неравенствам для интегралов и |*f* (*x*)*| ≤ g* (*x*):  ≤ ≤ => и из (3) => для *А1>В* и *A*2>В: => сходится. | ***У3*** (частный признак сравнения). *Пусть f* (*х*) *на* 0< *a≤ x<*+∞ *удовлетворяет соотношению |f(х)* | ≤ с/*х*λ,  *с и λ ‒* *постоянные,*  *λ >*1*. Тогда интеграл*   *сходится. Если* Ǝ *такая постоянная* с > 0, *что на* 0< *a≤ x<*+∞ *справедливо f* (*х*) *≥* с/*х*λ*, в котором λ ≤ 1, то*  *расходится.*  Док‒во => из У2 и следующего при­мера (поло­жить *g*(*х*) *=* с/*х*λ).  *Пример.* Рассмотрим НСИ где *а* > 0 и λ ‒ вещественные числа. *f* (*х*) *=* 1/*х*λ при *A*>0 интегрируема на [*а, А*]*,* причем , при λ ≠ 1 => при λ>1 , а при λ≤1 предел => при λ > 1 сходится НСИ , а при λ≤1 он расходится.  ***Следствие*** (частный признак сравнения в предельной форме). 1)*Если при* λ > 1 Ǝ *конечный предел , то интеграл*  *сходится.* 2) *Если же при* λ ≤ 1 Ǝ *предел , то*  *расходится.*  *Док‒во.* 1)Из существования предела при *x→*+∞ => ограничен-ность |*f(x)|хλ* => с некоторой постоянной *c0* > 0 выполняется неравенство *|f(х)* | ≤ с0/*х*λ => применяется 1‒я часть У3.  2) с > 0 => Ǝ столь малое ε>0, что *с ‒* ε > 0. Этому ε отвечает такое В > 0, что при *х ≥* Ввыполняется *с ‒* ε < *f* (*x*)*хλ* (это => из опреде-ле­ния предела) => *f* (*x*) *>*(*с ‒* ε) / *хλ* => действует 2‒я часть У3.  Пусть *f* (*х*)интегрируема по [*а, А*](=> |*f* (*х*)*|*  тоже).  ***О2.*** *НСИ называется* ***абсолютно сходящимся****, если сходится .*  ***О2.*** *НСИ называется* ***условно сходящимся****, если он сходится, а расходится.*  ***Замечание****.* Положив в У2 *g*(*х*)*= |f* (*х*)|=> из абсолютной сходимости НСИ вытекает его сходимость.  ***У4.*** *Пусть выполнены условия:*  1) *f* (*х*) *непрерывна на a ≤ x <* +∞;  2) *полуось a ≤ x <* +∞ *является мн-вом значений неко­торой строго монотонной функции х = g* (*t*)*, заданной на α ≤ t <*+∞ (*или*  *‒* ∞ < *t* ≤ α) *и имеющей на этой полуоси непре­рывн. производную;*  3) g*(α)=а.*  *Тогда из сходимости одного из следующих НСИ*  *вытекает сходимость другого и равенство этих интегралов.*  *Док‒во.* сегменту [*а, А*]отвечает, из‒за строгой монотонности функции *g* (*t*)*,* сегмент [α*,* ρ] (или [ρ, α]) оси *t* такой, что при изменении на [α*,* ρ] значения *х = g* (*t*)заполняют сегмент [*а, А*]*,* причем *g* (ρ) *= А* => выполнены все условия, при которых действует формула замены переменной под знаком определенного интеграла =>  В силу строгой монотонности функции *х = g* (*t*)*, А→*+∞ при *ρ→*+∞ и, обратно *ρ→*+∞ при *А→*+∞ (или *А→*+∞ при *ρ→‒*∞ и *ρ→‒*∞ при *А→*+∞) => из (4) => справедливость У4.  ***У5.*** *Пусть и* (*х*) *и v* (*х*) *имеют непре­рывные производные на*  *а ≤ x<*+∞ *и* Ǝ*. Тогда из сходимости одного из интегралов*  *вытекает сходимость другого и справедли­вость формулы*  *Док‒во.* На сегменте [*а, А*] дей­ствует обычная формула интегрирования по частям =>  Т.к. при *А→*+∞ выражение → *,* то из последнего равенства следует одновременная сходимость или расходимость интегралов (5) и справедли­вость (6) в случае сходимости одного из интегра­лов (5). |

|  |  |
| --- | --- |
| **13. Признак Абеля‒Дирихле. Главное значение несобственного интеграла.**  Пусть *f* (*х*)определена на *a≤ x<*+∞ и для *А* (*A≥a*) Ǝ определенный интеграл Римана  ***О1.*** *Предел*  *в случае, если он* Ǝ*, называется* ***несобственным интегралом 1‒го рода*** *от f* (*х*) *по полупрямой* [*а,* +∞) *и* *обозначается*  *При этом говорят, что НСИ* (3) *схо­дится:*  *Если предела* (2) *, то НСИ* (3) *расходится.*  НСИ по ‒∞< *x ≤ b* и по всей прямой:  при независимом друг от друга стремлении *А' →*‒∞ и *А" →* +∞. Из этих определений =>  1) если для некоторого *а* сходится каждый из НСИ и *,* то сходится и *,* причем:  2) если сходится НСИ и *b* ‒ число, *b >* *а,* то сходится *,* причем  Для существования предель­ного значения функции *F*(*А*)при  *А →* +∞ необходимо и дос­таточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши: для ε > 0 Ǝ *В>а,* для *А1* и *A2*: *А1* >*B,* *A2* >*В* выполняется  => справедливо У1. | ***У1***(критерий Коши сходимости НСИ). *Для сходимости НСИ*  *необходимо и достаточно, чтобы для* ε>0 Ǝ *В>а, для А1 и* *A2,* : *А1* >*B,* *A2* >*В:*  Пусть *f (х)* задана на полупрямой *a≤ x<*+∞ и для *А ≥ а* Ǝобычный интеграл  Пусть *f(х)* интегрируема по [*а, А*](=> |*f(х)|*  тоже).  ***О2.*** *НСИ называется* ***абсолютно сходящимся****, если сходится .*  ***О2.*** *НСИ называется* ***условно сходящимся****, если он сходится, а расходится.*  ***У2 (признак Дирихле ‒ Абеля)***. *Пусть выполнены условия:*  1) *f* (*х*) *непрерывна на a≤ x<*+∞ *и име­ет на этой полупрямой ограниченную первообразную F* (*х*)(для всех *x ≥ a*:  *|F* (*х*) *| ≤ K=const*);  2) *g*(*х*) *определена и монотонно* ***не*** *возрастает на a ≤ x <* +∞ *и имеет равный 0 предел при x→+∞;*  3) *производная g '* (*х*)Ǝ *и непрерывна в точке a≤ x<*+∞.  *Тогда сходится НСИ*  *Док‒во.* Пусть [*А1, А2*] ‒ сегмент полупрямой *a ≤ x <* +∞, *А2 > А1.* Проведем на нем интегрирование по частям  *|F*(*x*)*| ≤ K* и *g* (*х*)не возрастает и *g* (*х*) *→* 0 при *x→+∞*  (т.е. *g* (*х*) *≥ 0,*  *g '* (*х*) *≤ 0*) *=>*  Пусть ε > 0. Так как *g* (*х*) *→* 0при *х→ ∞*, то по данному ε можно выбрать *В* так, что при *А1 ≥ B* выполняется неравенство *g*(*А1*)*<ε/*(*2K*) *=>* из неравенства (5) => для *А1>В* и *A*2>Ввыполняется => по критерию Коши (4) сходится.  ***О4.*** *Пусть f* (*х*) *определена на прямой*  ‒∞ *< х<+∞ и интегрируема на каждом сегменте, принадлежа­щем этой прямой. Функция f* (*х*) *интегрируема по Коши, если* Ǝ (в симметричных пределах)*. Этот предел называется* ***главным значением несобственного интеграла*** *от f* (*х*) *(в смысле Коши)*:  ***У3.*** *Пусть f* (*х*) *интегрируема на каж­дом сегменте прямой* ‒∞ *< х <+∞*. *Если f* (*х*) *не­четна, то она интегрируема по Коши и главное значение интег­рала от нее равняется* 0*. Если f* (*х*) *четна, то она интегрируема по Коши* ⬄ *сходится НСИ .*  1‒я часть очевидна. Для до­к‒ва 2‒й части воспользоваться равенством , справедливым для любой четной функции, и О1 сходимости НСИ. |

|  |  |
| --- | --- |
| **14. Метод хорд и его обоснование.**  Послед‒сть *х0, х1,* .... *хп,* ... называется ***итераци­онной,***если для *п* ≥1 *хп* выражается через *хп‒1* по рекуррентной формуле *хп = F* (*хп‒1*)*,*  *х0* ‒ число из области задания *F*(*х*)*.*  ***У1****. Пусть F* (*х*) *непрерывна на* [*а, b*] *и пусть все элементы итерационной послед‒ти х0, х1,* .... *хп,* ... *лежат на* [*а, b*]*. Тогда, если* {*хn*}→ *с, то число с является корнем уравнения х = F* (*х*).  *Док‒во*. {*хn*}→ *с* ивсе *хп* [*а, b*]=> *с* ∈[*а, b*]. *F* (*х*)непрерывна в *с =>*  { *F* (*хп*)} → *F* (*с*) *=>* равенство *хп = F (хп‒1*)в пределе при *п* →∞ переходит в *с = F* (*с*) *=>* *с ‒* корень уравнения *х = F* (*х*).  **Метод хорд.** Пусть искомый корень *с* уравнения *f* *(х) =* 0 изоли­рован на  [*а, b*],  *х0* ∈ [*а, b*] *‒* 0‒е прибли­жение корня, обо­значим *А0 = f* (*x0*)*,*  *В = f* (*b*).Про­ведем через точки *А0* и *В* хорду *A0 В* и возьмем за 1‒е приближение абсциссу *x1* точки пересече­ния этой хорды с осью *Ох*. Далее проведем хорду через точки *А1* с абсциссой *х1* и *В.* За 2‒е приближение возьмем абсциссу *х2* точки пересечения хорды *А2 В с* осью *Ох.* Продолжая этот процесс неограниченно, построим послед‒сть *х0, х1, х2,* .... *хп,* ... приближенных значений искомого корня. Уравнение хорды, проходящей через точки *Ап* (*хп, f* (*хп*))и В(*b*, *f* (*b*)):  абсцисса *хn+1* точки пересечения этой хорды с осью *Ох.* (3) определяет алгоритм метода хорд.  **Обоснование метода.** Пусть искомый ко­рень *с* уравнения *f* (*х*)= 0 изолирован на [*а, b*]*,* на котором *f* (*х*)имеет *монотонную 1‒ю производ­ную, сохраняющую постоянный знак. f*  '*(х)*  не­прерывна, ибо она не может иметь точек разрыва 1‒го рода, а монотонная функция других точек разрыва не имеет. Пусть эта *f*  '(*х*) *>*0 ине убывает на [*а, b*]. Уравнение  имеет на [*а, b*] только 1 корень *с,* совпадающий с кор­нем ур-ния *f* (*х*) *=* 0 (при этом считаем, что *F*(*b*) *= b ‒ f* (*b*) */ f* '(*b*) *=>* *F*(*х*)будет не­прерывна на всем [*а, b*])=> вместо уравнения *f* (*х*)= 0 можно решать уравнение (4) => взять *х0 = а*и построить итерационную послед‒сть  Рекуррентная формула (5) ≡ рекуррентной формуле (3).  Докажем, что {*хn*}→ *с.* Если для некоторого номера *п* окажется, что *хп = с,* где *с ‒* искомый корень, то *f* (*хn*) *= f* (*с*)= 0 и из (5) => *хп+1 = с =>* аналогично *хп*+2 = *хп+3* = ... = *с,* т. е. {*хn*}→*с.*  Докажем, что если *а ≤ хп ≤* *с,* то *а ≤ хп ≤ хп+1 ≤* *с.* Пусть *а ≤ хп ≤* *с*. Из (5), учитывая, что *f* (с) = 0:  где *хп< ξn < с, с* < *ξn*\* < *b =>* *ξn < ξn*\*. Т.к. *f* '(*х*) *>*0 ине убывает = >  0 < *f* '(*ξn*) *≤ f* '(*ξn\**)=>дробь в правой части (6) > 0 и ≤ 1,  (т.к. (*b ‒ с*) *f* '*(ξn\*)* + (*с ‒ хп*) *f* '(*ξn*) *≥* [(*b* ‒ *с*)+ (*с ‒ хп*)] *f* '(*ξn*) = (*b ‒ хп*) *f* '(*ξn*) ) => 0 ≤ *хп+1 ‒ хп ≤* *с ‒ хп,* => *хп ≤ хп+1 ≤* *с =>* и из того, что *х0* = *а =>* все *хп* ∈ [*а, с*](и тем более ∈ [*а, b*])и послед­‒сть {*хn*}является неубывающей (=> и сходящейся). В силу У1 {*хn*}→ с.  ***З1.*** Еще 3 случая: 1) *f* '(*x*) *<* 0 ине возрастает на [*а, b*] (все делать также)*,* 2) *f* '(*x*)*>*0 и не возрастает на [*а, b*], 3) *f* '(*x*) *<*0 и не убывает на [*а, b*].  В случаях 2) и 3) уравнение *f* (*x*) *=* 0 заменяется уравнением  и нулевое приближение точка *х0 = b* (при этом {*хп*} ‒ невозрастающая).  ***З2*.** Оценка отклонения *n*‒го приближе­ния *хn* от точного значения корня *с*. Т. Лагранжа к *f* (*хп*) *= f* (*хп*) *‒* *f* (*с*) => *f* (*хп*)= (*хп ‒* *с*) *f* ' (ξ*n*) => |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **15. Метод касательных и его обоснование**.  Послед‒сть *х0, х1,* .... *хп,* ... называется ***итераци­онной,***если для *п* ≥1 *хп* выражается через *хп‒1* по рекуррентной формуле *хп = F* (*хп‒1*)*,*  *х0* ‒ число из области задания *F*(*х*)*.*  ***У1****. Пусть F*(*х*) *непрерывна на* [*а, b*] *и пусть все элементы итерационной послед‒ти х0, х1,* .... *хп,* ... *лежат на* [*а, b*]*. Тогда, если* {*хn*}→ *с, то число с является корнем уравнения х = F* (*х*).  *Док‒во*. {*хn*}→ *с* ивсе *хп* [*а, b*]=> *с* ∈[*а, b*]. *F* (*х*)непрерывна в *с =>* { *F* (*хп*)} → *F* (*с*) *=>* равенство *хп = F (хп‒1*)в пределе при *п* →∞ переходит в *с = F* (*с*) *=>* *с ‒* корень уравнения *х = F* (*х*).  ***У2.*** *Пусть с ‒ корень х = F* (*х*) *и пусть в некотором* [*с ‒ ε*, *с +* ε] *|F'*(*х*)*|≤ α* < 1. *Тогда* {*хn*}→ *с* (*х0 ‒ число из* [*с ‒ ε*, *с +* ε])*.*  *Док‒во.* *х0* ∈ [*с ‒ ε*, *с +* ε] => пусть *хп‒1* ∈ [*с ‒ ε*, *с +* ε], надо доказать, что *хп* ∈ [*с ‒ ε*, *с +* ε]. По Т. Лагранжа и учитывая, что  *F* (*с*) *= с, хп = F* (*хп‒1*):  *xn ‒ c = F*(*xn‒1*) *‒ F*(*c*) *= F'*(*ξ*)(*xn‒1 ‒ c*) **(1)**  где *xn‒1* < ξ < c => ξ ∈ [*с ‒ ε*, *с +* ε]. *|F'*(*х*)*|≤ α* < 1=> из (1)  |*xn ‒ c| ≤ α|xn‒1 ‒ c|* **(2)** *=>* |*xn ‒ c| < |xn‒1 ‒ c| =>* *хп* расположен к *с* ближе, чем предыдущий *хn‒1 =>* т.к. *хп‒1* ∈ [*с ‒ ε*,*с+*ε] и т. к. сегмент симметричен относительно *с,* то *хn* ∈ [*с ‒ ε*, *с +* ε] => все {*xn*} ∈ [*с ‒ ε*, *с +* ε]. Докажем, что {*хn*}→*с.* (2) справедливо для *п=>* |*xn ‒ c| ≤ αn|x0 ‒ c| =>* т.к. *αn* → 0, то *xn → c.*  **Метод касательных**. Пусть искомый корень *с* уравнения *f* (*х*) *=* 0 изолирован на [*а, b*]*.* Пусть 0‒е приближение искомого корня *х0* ∈ [*а, b*]и *В0 = f* (*х0*)*.* Проведем через *В0* касатель­ную к графику функции и возьмем за 1‒е приближение абсциссу *х1* точки пересечения этой касательной с осью *Ох*. Далее проведем касательную через *В1* с абсциссой *х1* и возьмем за 2‒е приближение абсциссу *x*2 точки пересечения этой касательной с осью *Ох.* Продолжая, построим послед‒сть *х0, х1,* .... *хп,* ... приближенных значений искомого корня.  Возьмем уравнение *Y ‒ f* (*хп*)= *f '*(*хп*) (*х ‒ хп*)ка­сательной в *Вп* и вычислим абсциссу *хп+1* точки пересечения этой ка­сательной с осью *Ох =>* получим формулу ал­горитма метода касательных: | **Обоснование метода.**  **1**°. Пусть корень *с* уравне­ния *f* (*х*) *=* 0 изолирован на [*а, b*]*,* где *f* (*х*)имеет *f* '(*х*) *≠* 0и ограниченную *f* (2)(*х*)*.* Докажем, что в этом случае Ǝ такая малая окрестность корня *с,* что если 0‒е приближение *х0* лежит в этой окрестности, то {*хп*}→ *с.* Уравнение  имеет на [*а, b*]только 1 корень *с,* совпадающий с кор­нем уравнения *f* (*х*)= 0 => вместо *f* (*х*) *=* 0 можно решать уравнение (4) => взяв некоторое *х0,* по­строим итерационную послед‒сть  Рекуррентная формула (5) ≡ рекуррентной формуле (4).  В силу требований, наложенных на *f* (*х*)*,* Ǝ *т* > 0и *N* > 0: всюду на [*а, b*] | *f* '(*х*)*|≥ m>*0 и | *f* ''(*х*)*| ≤ N*. Т.к.  Из непрерывности *f* (*х*) *=>* в некоторой ε‒окрест­ности корня *с*  где α ‒ фиксированное число: 0 < α < 1 . Из (6) и (7) => всюду в  ε‒окрестности корня  *=>* если взять *x0* из этой окрестности, то по У2 {*хn*}→*с.*  ***З1****.* Оценка погрешности*.* Разложим *f* (*х*)вокрестности *хп* по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:  *f* (*x*) = *f* (*хп*) + *f* '(*хп*)(*x* ‒ *хп*) + 1/2 *f* ''(ξ)(*x ‒ xn)2* . Полагая *х* = *с* и учитывая *f* (*с*) *=* 0: 0 = *f* (*хп*) + *f* '(*хп*)(c‒ *хп*) + 1/2 *f* ''(ξ)(c *‒ xn)*2 Вычитая из последней формулы ф‒лу *f* (*хп*) + *f* '(*хп*)(*xn+1* ‒ *хп*) *=* 0, которая вытекает из (5), получим  Последовательно применяя эту оценку для *п* =0, 1, 2, .... получим:  **2°**. Пусть ко­рень *с* уравнения *f* (*х*)= 0 изолирован на [*а, b*]*,* где *f* (*х*)имеет *монотонную f* '(*х*)*, сохраняющую постоянный знак. f* '(*х*)обязательно не­прерывна, ибо она не может иметь точек разрыва 1‒го рода, а монотонная функция других точек разрыва не имеет. Пусть  *f*  '(*х*) *>* 0 ине убывает на [*а, b*].  Докажем, что если *х0* = *b,* а *xn*+1 определяется через *хп* с помощью формулы (5), то {*хn*}→ *с.* Если для некоторого номера *п* окажется, что *хп = с,* где *с ‒* искомый корень, то *f* (*хn*) *= f* (*с*) = 0 и из (5) =>  *хп+1 = с =>* аналогично *хп*+2 =*хп+3* =...= *с,* т. е. {*хn*}→*с.*  Докажем, что если *c ≤ хп ≤* *b,* то *c ≤ хп+1 ≤ хп ≤* *b.* Из (5) и *f* (с) = 0:  где с*< ξn < хп.*  Т.к. *f*  '(*х*)*>*0 ине убывает = > 0< ≤ 1 =>  0 ≤ *хп ‒ хп+1 ≤* *хп ‒ с,* => *c ≤ хп+1 ≤ хп =>* из *х0* = *b =>*  *хп* ∈[*с, b*](и тем более ∈[*а, b*])и {*хn*}является невозрастающей (и сходящейся). По У1 {*хn*} *→* с.  ***З2.*** Еще 3 случая: 1) *f*  '(*х*)*<*0 ине возрастает на [*а, b*] (все также)*,*  2) *f* '(*х*)*>*0 и не возрастает на [*а, b*], 3) *f* '(*х*)*<*0 и не убывает на [*а, b*]. В 1) *х0 = b,* а в 2) и 3) *х0 = а.* Это обеспечит {*xn*} [*а, b*] и {*xn*}→ c*.*  ***З3****.* Оценка отклонения *n*‒го приближе­ния от точного значения корня *с*. Т. Лагранжа к *f* (*хп*) *= f* (*хп*) *‒* *f* (*с*)=> *f* (*хп*)= (*хп ‒* *с*) *f* ' (ξ*n*) => |

|  |  |
| --- | --- |
| **16. Приближенные методы вычисления определенных интегралов**  Пусть требуется вычислить интеграл . **(1)**  **Метод трапеций**. Разобьем [*a, b*] на *п равных* частей точками *а* = *х0 <х1* < ... < *хп = b.* Метод трапеций: замена интеграла (1) суммой  площадей трапеций с основаниями, равными *f* (*xk ‒1*)и *f* (*хk*)*,* и с высотами, равными *xk ‒ xk ‒1= (b‒a*)*/n* => ***формула трапеций***  Докажем: если *f* (*х*)имеет на [*a, b*] непре­рывную *f* (2)(*х*), то Ǝη∈[*a, b*]:  Оценим интеграл *,* считая, что *f* (*х*) *имеет на*  [*‒h, +h*] *непрерывную 2‒ю производную.*  Подвергая следующий интеграл двукратному интегрированию по частям, получим  Т.к. величина представляет собой площадь трапеции, то (5) и (6) доказывают, что ошибка, совершаемая при замене этой площадью, имеет порядок *h3.*  Для вычисления интеграла (1) представим этот интеграл в виде суммы достаточно большого числа *п* интегралов  Применяя к каждому из этих интегралов формулы (5) и (6), получим (3) с оста­точным членом (4). | **Метод прямоугольников**. Разобьем [*a, b*] на *п равных* частей точками *а* = *х0 <х1* < ... < *хп = b.* Пусть *x2k‒1* ‒ средняя точка [*x2k‒1*, *x2k*]. Метод прямоугольников: замена интеграла (1) суммой  площадей прям‒ков с высотами, = *f* (*x2k ‒1*), и основаниями, равными *x2k ‒ x2k ‒1=* (*b ‒a* )/*n* => ***формула прямоугольников***  Если *f* (*х*)имеет на [*a, b*]непре­рывную 2‒ю производную, то  Ǝ η ∈ [*a, b*]:  Ошибка метода прямоугольников имеет порядок *h3.*  **Метод парабол**. Разобьем [*a, b*] на *п* равных частей при помощи точек *а = х0* < *х2* < ... < *х2п = b* и *х2k ‒1* ‒ середина [*х2k‒2, х2k*]. Метод парабол заключается в замене интег­рала (1) суммой площадей фигур, представляющих собой криволинейные трапеции, лежащие под параболами, проходящими через 3 точки графика функции *f* (*х*)с абсциссами *х2k ‒2,х2k ‒1, х2k*:  => справедлива ***формула парабол***или ***формула Симпсона***:  Если *f* (*х*)имеет на [*a, b*] непре­рывную 4‒ю производную, то  Ǝ η ∈ [*a, b*]:  Ошибка метода парабол имеет порядок *h5*. |

|  |  |
| --- | --- |
| **17. Различные множества точек и последовательности точек *п*‒мерного пространства. Теорема Больцано‒Вейерштрасса.**  *Мн‒во всех упорядочен­ных совокупностей* ( *х1, ..., хт* ) *т чисел х1,* ..., *хт называется* ***т‒мерным координатным пространством*** *Ат .*  *Координатное пр‒во Ат называется* ***т‒мерным евкли­довым***  ***пр‒вом*** *Ет, если между 2-мя точками М'* (*х1', .... х'т*)и  *М"* (*х1",* ..., *хт"*) *пр‒ва Ат определено расстояние* :  1°. {*М*}: *ρ*(*М, М*0) *≤ R2 ‒* ***т‒мерный шар***радиуса *R* с центром в *М0.* Если *ρ*(*М, М*0) *< R2,* то {*М*}‒ *открытый т‒мерный шар.*  2°. {*М*}: *ρ*(*М, М*0) *= R2* ‒ ***т‒мерная сфера***радиуса *R* с центром в точке *М0.*  3°. Мн‒во {*М*}: *|х1 — x10| ≤ d1 ,…, |хm — xm0| ≤ dm ‒*  ***т‒мерный координатный паралле­лепипед****. М0* (*x10,* ..., *xm0* )‒ его центр. Если неравенства строгие, то {*М*} *‒* ***открытый парал-пед****.*  ***ε‒окрестность*** *точки М0 т‒мер­ного евклидова пр‒ва Ет ‒ открытый т‒мерный шар ра­диуса* ε *с центром в М0.* ***Прямоугольная окрест­ность*** *М0*  *‒ открытый т‒мерный координатный параллелепипед с центром в М0.*  ***У.***  *ε‒окрестность М0 евклидова т‒мерного пр‒ва Ет содержит некоторую прямоугольную окрестность этой точки. прямоуго-льная окрестность М0 содержит некоторую ε‒окрестность М0.*  *М ‒* ***внутренняя*** *точка* {*М*}*, если* Ǝ *некоторая ε‒окрестность М, все точки которой* {*М*}*. Точка М ‒* ***граничная*** *точка* {*М*}*, если*  *ε‒окрестность M содержит точки,* {*М*} *и* {*М*}*. Мн‒во* {*М*} *пр‒ва Ет называется* ***открытым множеством или областью****, если точка этого мн‒ва внутренняя. Если граничная точка* {*М*} *является точ­кой этого мн‒ва, то* {*М*} *‒* ***замкну­тое****.* Если {*М*} *‒* область, то {}*,* полученное присоединением к {*М*}всех его граничных точек, ‒ ***замкнутая область****.* Если все точки области {*М*}находятся внутри неко­торого шара, то {*М*} ‒***ограниченная****.*  ***Непрерывной кривой*** *L* *в пр‒ве Е т называется мн‒во* {*М*} *точек пр‒ва, координаты х1, ..., хт которых являются непрерывными функциями параметра t* : *x1 = φ1*(*t*), …, *xm = φm*(*t*), *α ≤ t ≤ β* **(2)**  Точки *М'* (*х1', .... х'т*)и *М"* (*х1", …*, *хт"*)пр‒ва *Ет можно соединить непрерывной кривой L,* если Ǝ такая непрерывная кривая *L,* определяемая (2) и  *x1' = φ1*(*α*), …, *xm' = φm*(*α*) *x1'' = φ1*(*β*), …, *xm'' = φm*(*β*)  *Мн‒во* {*М*} *пр‒ва Ет называется* ***связным****, если 2 его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой* {*М*}*.* ***Окрестностью*** *М* называется открытое связное множество, содержащее *М.*  *Последовательность* {*Мn* } *точек Е т называется* ***сходящейся****, если* Ǝ *такая точка А, что для* ε >0 Ǝ *N=N*(ε) : *при п ≥ N выполняется ρ* (*Мп , А*)< ε. *А ‒ предел последовательности* {*Мn* }*.* | **Л1.** *Пусть послед‒сть* {*Мп*} *точек Ет* : {*Мп*} *→ А. Тогда послед‒сти*  *координат точек Мп* : { *х1*(*n*)}→ *а1*, …, { *хm*(*n*)}→ *ат* , где *а1, …*, *ат ‒ координаты А, и наоборот, если послед‒сти*  *координат точек Мп* : { *х1*(*n*)}→ *а1*, …, { *хm*(*n*)}→ *ат* , *то послед‒сть* {*Мп*} *→ А с координатами а1,* ..., *ат .*  *Док‒во*. 1. Если {*Мп*}→*А,* то для ε > 0 Ǝ *N* : при *п* ≥ *N* выполняется *ρ* (*Мп , А*)< ε. Пусть ( *х1*(*n*), …,  *хm*(*n*)) ‒координаты *Мn,* а (*а1,* ..., *ат*) *‒* координаты *А =>*  *ρ* (*Мп , А*)< ε можно записать:  2.Пусть { *х1*(*n*)}→ *а1*, …, { *хm*(*n*)}→ *ат*  => для ε > 0 Ǝ *N1, …, Nт* : при *п1* ≥ *N1 , …, пm* ≥ *Nm* выполняются  => при *п* ≥ *N =* max { *N1, …, Nт* }выполня­ется (3) => при *п* ≥ *N* выполняется *ρ* (*Мп , А*)< ε, где *А ‒* точка *Е т с* координатами *а1,* ..., *ат* => {*Мп*}→ *А •*  *Послед‒сть* {*Мп*} *точек Е т называется* ***фундаментальной или последовательностью Коши****, если для ε >* 0 Ǝ *N* : *при п ≥ N и для выполняется ρ* (*Мn+р, Мn*) < ε.  ***Критерий Коши*.** *Чтобы послед‒сть* {*Мп*} *точек Е т была сходящейся, необходимо и доста­точно, чтобы она была фундаментальной.*  Из фундаментальности {*Мn*} *<*=> { *х1*(*n*)}, …, { *хm*(*n*)} также фундаментальны. Затем применить критерий Коши для число­вых послед‒стей к послед‒стям координат то­чек {*Мn*}и лемму 1.  *Послед‒сть* {*Мn*} *точек Е т называется* ***ограниченной****, если*  Ǝ *а* > 0: *для п выполняется ρ* (*О*, *Мn* )≤ *а, где О ‒* *точка с координатами* (0, …,0)*.*  **Т *Больцано‒Вейерштрасса****. Из ограниченной послед‒сти* {*Мn*} *точек Е т можно выделить сходящуюся подпоследо­вательность*  *Док‒во*. {*Мn*}ограничена => для *п* выполняется *ρ* (О, *Мn )* ≤ *а.*  => { *х1*(*n*)}, …, { *хm*(*n*)} координат точек *Мп* ограничены. По теореме Больцано ‒ Вейерштрасса для числовых послед‒стей из можно выде­лить → *а1.* Из соответствующей подпосл‒сти по­след‒сти 2‒х координат точек *Мn* можно выделить подпосл‒сть → *а2.* При этом подпосл‒сть последовательности схо­дится к числу *а1* => . Про­должая, получим подпосл‒сть послед‒сти *m*‒х координат точек *Мn* , причем  => по Л1, подпосл‒сть → *А* (*а1,* ..., *ат*)•  ***З***. Если {*Мп*}{*М*}, где {*М*} ‒ замкнутое мн‒во, и {*Мп*} *→ A*, то  *A* {*М*}, т.к. в ε‒окрестности точки *А* есть точки *Мn* {*М*} => точка *А ‒* либо внутренняя, либо гра­ничная точка {*М*} => *A* {*М*}*.* |

|  |  |
| --- | --- |
| **18. Понятие функции *п* переменных и ее предельного значения.**  *Мн‒во всевозможных упорядочен­ных совокупностей* ( *х1, ..., хт* ) *т чисел х1,* ..., *хт называется* ***т‒мерным координатным пр‒вом*** *Ат .*  *Координатное пр‒во Ат называется* ***т‒мерным евкли­довым пр‒вом*** *Ет, если между двумя точками М'* (*х1', .... х'т*)и  *М"* (*х1",* ..., *хт"*) *координатного пр‒ва Ат определено расстояние* :  *Если каждой точке М из* {*М*} *точек Ет ставится в соответствие по известному закону некоторое число и, то говорят, что на мн‒ве* {*М*} *за­дана функция и = и* (*М*) *или и = f* (*М*)*.* {*М*}‒ ***область задания функции*** *и* =  *f* (*М*)*.* Число *и,* соответствующее данной *М* из {*М*} ‒ ***частное значение функции в М****.* Совокуп­ность {*и*}всех частных значений *и* = *f* (*М*) *‒* ***множество значений*** этой функции.  ***О1****. Число b называется* ***предельным зна­чением*** *функции и = f* (*М*) *в точке А* (***пределом функции*** *при М* → *A*), *если для сходящейся к А последо­вательности М*1, *М*2, ..., *Mn* ... *точек мн‒ва* {*М*}*, элементы Мп которой отличны от А* (*Мn* ≠ *A*), *соответствующая послед‒сть f* (*М1* )*,* ..., *f* (*Мп*)*, ... значений функции схо­дится к b.*  ***О2.*** *Число b называется* ***предельным значением*** *функции и = f* (*М*) *в точке А, если для* ε > 0 Ǝδ: *для всех точек М из области задания функции, удовлетворяющих условию* 0 < *ρ* (*М, А*)< δ, *выполняется | f* (*М*) *‒* *b |* < ε.  ***З.*** О1 и O2 эквивалентны.  *Док‒во.* 1. Пусть *b ‒* предел по О1, но **не** предел по О2 => Ǝ ε > 0 : для сколь угодно малого δ Ǝ *М* из области задания *f* (*М*) :  0 < *ρ* (*М, А*) < δ, но *| f* (*М*) *‒* *b |* ≥ ε => для δ*n =*1/*n*  Ǝ *Мп* : 0 < *ρ* (*Мn, А*) < δ, но *| f* (*Мn*) *‒* *b|* ≥ ε.  Из 0 < *ρ* (*Мn, А*) < δ => {*Мn*}→*A =>* по О1 { *f* (*Мn* )}→*b =>* противоречит *| f* (*Мn*) *‒* *b |* ≥ ε  2. Пусть *b ‒* предел по О2 и {*Мn*}→*A.* Фиксируем ε > 0, по О2  Ǝ δ > 0: *М* из области задания *f* (*М*) : 0 < *ρ* (*М, А*)< δ выполня-ется *| f* (*М*) *‒* *b |* < ε. Т.к. {*Мn*}→*A,* то для этого δ найдется *N*:  0 < *ρ* (*Мn , А*)< δ при *n ≥ N => | f* (*Мn* ) *‒* *b |* < ε при *n ≥ N =>* { *f* (*Мn* )}→*b.*  ***О3****. Число b называется* ***предельным зна­чением*** *функции и=f* (*М*) *при М* → , *если для* ε > 0 Ǝ *а >* 0:  *для всех М из области задания функции, удовлетворяющих условию ρ* (*O, М* )> *а*, *выполняется неравенство | f* (*М*) *‒* *b |* < ε. | ***У.*** *Пусть функции f* (*М*) *и g* (*М*)  *имеют в А пределы b и с. Тогда функции f* (*М*) *+ g* (*М*)*, f* (*М*) *‒ g* (*М*), *f* (*М*) · *g* (*М*),  *f* (*М*) */ g* (*М*)  *имеют в А пределы* (*частное при с ≠* 0), *равные соответственно b* + *с, b ‒* *с, b·с, b/c*.  Для док‒ва взять {*Мn*}→*A,* по условию { *f* (*Мn* )}→*b,*  *g*(*Мn* )}→*c =>* по св‒вам сходящихся послед‒стей:  { *f* (*Мn* ) *± g*(*Мn* )}→*b ± c,* { *f* (*Мn* ) *· g*(*Мn* )}→*b · c,*  { *f* (*Мn* ) */ g*(*Мn* )}→*b / c.* В силу произвольности {*Мn*}: и др. утверждения.  *Функция и = f* (*М*) *называется* ***бесконечно малой в точке А***(*при М→A*), *если*  Функция *f* (*М*)  *=* (*х1 ‒* *а1*)*n1 +… +* (*хт ‒* *ат*)*nm,* где *п1>*0*,* ..., *пm>*0, является бесконечно малой в *A* (*а*1, ..., *ат*)*,* т.к. каждая *f* (*xk*) = (*хk ‒* *аk*)*nk* является бесконечно малой в *хk = аk .*  *Если и* = *f* (*М*) *имеет предельное значение b в точке А, то функция α*(*М*) *= f* (*М*) *‒* *b является бесконечно малой в точке А,* т.к.  Специальное представление для функции, имеющей равное *b* пре­дельное значение в точке *A*:  Функция *f* (*М*)***удовлетворяет в точке*** *М = А* ***условию Коши****,* если для ε > 0 Ǝ δ : для *М'* и *М"* из области задания функции *f* (*М* )*,* удовлетворяющих 0 < *ρ* (*М', А*)< δ, 0 < *ρ* (*М'', А*)< δ, для соответствующих зна­чений функций:*| f* (*М'* ) *‒* *f* (*М''* ) *|* < ε  **Т*(критерий Коши).*** *Чтобы функ­ция f* (*М*) *имела конечное предельное значение в точке М = А, необ­ходимо и достаточно, чтобы функция f* (*М*) *удовлетворяла в этой точке условию Коши.*  *Док‒во. Необх‒сть.* Пусть . Возьмем ε > 0, по О2 для ε / 2 Ǝ δ > 0 : для *М'* и *М"* из области задания *f* (*М* ):  0 < *ρ* (*М', А*)< δ, 0 < *ρ* (*М'', А*)< δ для соответ-щих зна­чений функций: *| f* (*М'* ) *‒* *b |* < ε / 2, *| f* (*М''*) *‒* *b |* < ε / 2 =>*| f* (*М'* ) *‒* *f* (*М''* ) *|= |* [*f* (*М'* ) *‒* *b*] ‒ [ *f* (*М''*) *‒* *b*] *| ≤*  *≤ | f* (*М'* ) *‒* *b |+| f* (*М''*) *‒* *b |< ε => f* (*М*)удовлетворяет в точке *М = А* условию Коши.  *Дост‒сть.* Пусть *f* (*М*)удовлетворяет в точке *М = А* условию Коши и {*Мn*} ‒ последовательность: {*Мn*}→*A* , *Мn* ≠ *A.* Возьмем ε > 0 и соответствующее δ > 0, чтобы выполнялось условие Коши, для этого δ выберем номер *N* : 0 < *ρ* (*Мn, А*) < δ при *n ≥ N* (это можно сделать, т.к. {*Мn*}→*A*) => для *р* (=1, 2, …)  0 < *ρ* (*Мn+р, А*) < δ при *n ≥ N =>* в силу условия Коши  *| f* (*Мn+р* ) *‒* *f* (*Мn* ) *|* < ε при *n ≥ N* => фундаментальность послед‒сти { *f* (*Мn* )} => сходимость { *f* (*Мn* )} к некоторому *b.*  Возьмем {*Мn*}→*A,* {*Мn'*}→*A* , пусть { *f* (*Мn* )}→ *b,*  { *f* (*Мn'*)}→ *b'.* Тогда посл‒сть *М*1, *М*1*'*, ..., *Mn, Mn'* сходится к *А => f* (*М*1), *f* (*М*1*'*), ..., *f* (*Мn*), *f* (*Мn'* ) сходится, а т.к. все ее подпоследовательности сходятся к одному и тому же пределу, то  *b = b'.* |

|  |  |
| --- | --- |
| **19. Непрерывность функции *п* переменных. Основные теоремы о непрерывных функциях.**  Пусть *А*  области задания *и = f* (*М*)нескольких переменных и  ε‒окрестность *А* содержит ≠ *А* точки области задания *f* (*М*).  ***О1.*** *Ф‒я и = f* (*М*)  *называется непрерывной в А, если предел этой функции в точке А* Ǝ *и равен f* (*A*)*.*  ***О2.*** *Ф‒я и = f* (*М*) *называется непрерывной в А, если для* ε > 0  Ǝδ > 0: *для всех М из области задания функции*:  *ρ* (*М, А*)< δ, *выполняется | f* (*М*) ‒ *f* (*A*) |< ε.  ***О3.*** *Ф‒я и = f* (*М*) *называется непрерывной на мн‒ве* {*М*}*, если она непрерывна в точке* {*М*}*.*  Пусть для *М* (*х1, ..., хт*) из области задания ф-ции и *А*(*а1,* ..., *аm*): *x1 ‒ a1 =* Δ*x1, …, xm ‒ am =* Δ*xm .*  ***Полное* *приращение*** *и* = *f* (*М*) *в А*:  Δ*u = f* (*М*) ‒ *f* (*A*) = *f* (*a1 +* Δ*x1*, … , *am +* Δ*xm*) ‒ *f* (*a1*, … , *am*)  *Для непрерывности и = f* (*М*) *в А необхо­димо и достаточно, чтобы ее приращение* Δ*u*  *являлось бесконечно малой в А функцией:*  Это *разностная форма условия непре­рывности и* = *f* (*М*) *в А .*  Зафиксируем все *xi* , кроме *k*‒го, *xk*  придадим приращение Δ*хk*, чтобы (*x1, …, xk‒1, xk +* Δ*xk*, *xk+1*… , *xm*) области задания *f* (*М*). ***Частное приращение***в *М* (*х1, …*, *хт*)*,* соответствующее Δ*хk* :  Δ*xk* *u =* *f* (*x1,…, xk‒1, xk +* Δ*xk*, *xk+1*… , *xm*) ‒ *f* (*x1*, *x2*… , *xm*)  *Ф‒я и = f* (*х1, ..., хт* ) *называется непрерывной в М* (*х1, …*, *хт*) *по переменной хk , если частное приращение* Δ*xk u этой ф‒и в точке М является бесконечно малой функцией от* Δ*хk* :  Из непрерывности *и = f* (*х1, ..., хт* )в *М =>* ее непрерывность в *М* по переменной *х1,* ..., *хт.* Наоборот нет.  1°. **У1*.****Пусть f* (*М*) *и g* (*М*)  *непрерывны в А*. *Тогда f* (*М*) *+ g* (*М*)*,*  *f* (*М*) *‒ g* (*М*), *f* (*М*) · *g* (*М*), *f* (*М*) */ g* (*М*) *непрерывны в А* (*частное при g* (*A*) ≠0).  *Док‒во.*  *f* (*М*) *и g* (*М*) непрерывны в *А =>* по О1 они имеют в *А* пределы *f* (*А*) *и g* (*А*) => предельные значения *f* (*М*) *+ g* (*М*)*,*  *f* (*М*) *‒ g* (*М*), *f* (*М*) · *g* (*М*), *f* (*М*) */ g* (*М*) существуют и равны соответственно *f* (*А*) *+ g* (*А*)*, f* (*А*) *‒ g* (*А*), *f* (*А*) · *g* (*А*), *f* (*А*) */ g* (*А*) => по О1 они непрерывны в *А.*  2°. Пусть ф-ции *x1 = φ1*(*t1, …, tk*), …, *xm = φ1*(*t1, …, tk*) **(1)**  заданы на мн‒ве {*N*}евклидова пр‒ва *Еk* , *t1, …, tk* ‒ координаты точек в *Еk* => *N* (*t1, …, tk*)из {*N*}ставится в соответствие с по­мощью (1) точка *М* (*х1, ..., хт*)евклидова пр‒ва *Ет.* Пусть {*М*} *-*  мн‒во всех этих точек, *и* = *f* (*х1, ..., хт*) *‒* функция *m* переменных, заданная на {*М*} *=>* на мн‒ве {*N*}пр‒ва *Еk* определена *сложная функция и* = *f* (*х1, ..., хт*), где *х1, ..., хт* ‒ функ­ции определяются формулами (1). | **У2*.*** *Пусть ф‒и x1 = φ1*(*t1, …, tk*), …, *xm = φ1*(*t1, …, tk*) *непрерывны в А* (*а1,* ..., *аk*), а *ф‒я и = f* (*х1, ..., хт*) *непрерывна в В* (*х1, ..., хт*), *где bi = φi* (*а1,* ..., *аk*), *i* = 1, ..., *т*. *Тогда* *сложная ф‒я и = f* (*х1, ..., хт*), *где* *х1, ..., хт ‒ опреде­ленные выше ф‒и аргументов t1, …, tk* , *непрерывна в А*(*а1,* ..., *аk*).  *Док‒во*. Пусть {*Nn*}, *Nn* ≠ *A* ‒ сходящаяся к *А* посл‒сть точек из области {*N*} задания функций *φi* (*t1, …, tk*), а {*Мn* } *‒* соответ-щая послед‒сть точек: *хi*(*n*) = *φi* (*t1*(*n*)*, …, tk*(*n*)). Ф‒и *φi* непрерывны в *A =>* {*Мп*} *→* *В* (*b1* ..., *bт*)*.* Ф‒я *и* = *f* (*х1, ..., хт*) непрерывна в *В =>* {*f* (*Мn* )} → *f* (*B*). Но {*f* (*Мn* )} ‒ это после­д‒сть значений слож-ной функции, отвечающая сходящейся к *А* последовательности {*Nп*}точек области ее задания => непрерывность сложной ф-ции.  3°. **Т1***. Если и* = *f* (*М*) *непрерывна в А* ∈ *Е т и f* (*А*) *≠* 0, *то* Ǝ *такая ε‒окрестность точки А, в пределах которой во всех точках области своего задания f* (*М*) *не обращается в 0 и имеет знак, совпадаю­щий со знаком f* (*А*) *.*  *Док‒во.*  *и* = *f* (*М*)непрерывна в *А =>* по О1 Ǝ , где *b = f* (*A*) ≠ 0 и по О2 для ε > 0 Ǝ δ > 0, что для всех *М* из области задания ф‒и : *ρ* (*М, А*)< δ, выполняется *| f* (*М*) ‒ *f* (*A*) |< ε =>  *b ‒* ε < *f* (*М*) < *b +* ε при *ρ* (*М, А*)< δ. Если взять ε < |*b*|, то *b ‒* ε,  *b +* ε и *b* будут одного знака => всюду в ε‒окрестности *f* (*М*) сохраняет знак числа *b = f* (*A*).  4°. **Т2*.*** *Пусть и* = *f* (*М*) *непрерывна во всех точках связного мн‒ва* {*М*} *евклидова пр‒ва Ет, причем f* (*А*) *и f* (*В*) *‒ значения этой функции в точках А и В этого мн‒ва. Пусть С ‒* *число между*  *f* (*А*) *и f* (*В*)*. Тогда на непрерывной кривой L*, *соединяющей А и В и целиком расположенной в* {*М*}*,* Ǝ *N* : *f* (*N*)= С.  *Док‒во*. Пусть *x1 =* φ*1*(*t*), …, *xm =* φ*m*(*t*), *α ≤ t ≤ β* ‒ уравнения непрерывной кривой *L*, соединяющей *А* и *В*  {*М*}и целиком расположенной в {*М*}. На [α, β] определена сложная ф‒я *и = f* (*х1, ..., хт*)*,* где *xi =* φ*i*(*t*), *i* = 1, …, *m, α ≤ t ≤ β*, ее значения на  [α, β] совпадают со значениями *и = f* (*М*)на кривой *L*. Эта слож-ная ф‒я 1 пере­менной *t* по У2 непрерывна на [α, β] и по теореме о прохождении непрерывной функции от 1 переменной через про-межуточное зна­чение в некоторой точке ξ [α, β] принимает зна-чение С => в *N L* с координатами φ*1* (*ξ*), ..., φ*m* (*ξ*): *f* (*N*)= С*.*  5°. **Т3(*1‒я Вейерштрасса*)*.*** *Если и* = *f* (*М*) *непрерывна на замкну-том ограниченном мн‒ве* {*М*}*, то она ограничена на этом мн‒ве.*  *Док‒во*. Пусть *и = f* (*М*)не ограничена сверху на {*М*}*.* Выделим послед‒сть {*Мn*}точек мн‒ва {*М*}: *f* (*Мn* )> *п.* По Т Больцано ‒ Вейерштрасса из {*Мn* } можно выделить сходящуюся подпослед‒сть { *Мkn* } → *М*, *M*  {*М*}*.* Послед‒сть { *f* (*Мkn*)} бес­конечно большая. Но из непрерывности *f* (*М*) в *М = >*  { *f* (*Мkn*)} должна сходиться к *f* (*М*)*.* Противоречие.  6°. **Т4(*2‒я Вейерштрасса*)*.*** *Если и = f* (*М*) *непрерывна на замкнутом ограниченном мн‒ве* {*М*}*, то она достигает на этом множестве своих ТВГ и ТНГ.*  *Док‒во.* Пусть *f* (*М*) на замкнутом ограниченном мн‒ве{*М*} не достигает своей ТВГ *N* => для всех точек мн‒ва{*М*} : *f* (*М*)< *N* и функция *F*(*M*) = 1/ (*N ‒ f* (*M*)) > 0, не обращается в 0 и по У1 непрерывна на {*М*} => по Т3 *F*(*M*) ограничена на {*М*}, т.е. Ǝ *В,* что для всех *М* {*М*}: *F*(*M*) = 1/ (*N ‒ f* (*M*)) ≤ *В =>*  т.к. *N ‒ f* (*M*) > 0, то *f* (*M*) ≤ *N ‒* 1/*В* для всех *М*  {*М*} => противоречит тому, что *N ‒* наименьшая из всех верхних граней.  7°. *Функция и = f* (*М*) *называется равномерно непрерывной на мн‒ве* {*М*} *евклидова пр‒ва Е т, если для* ε *>* 0 Ǝδ = δ (ε) > 0, *что для М' и М"* {*М*}: *ρ* *(М', М")* < δ, *выполняется* | *f* *(М") ‒ f* *(М')* | < ε.  **Т5(*о равномерной непрерывности*)*.*** *Непрерывная на замкнутом ограниченном мн‒ве* {*М*} *функция равномерно непрерывна на* {*М*}*.*  *Док‒во.* Пусть непрерывная на замкнутом ограниченном мн‒ве{*М*}функция *и = f* (*М*)не является равномерно непрерывной на {*М*}, т.е. Ǝ ε > 0: δ > 0 Ǝ *М'* и *М"* {*М*}*,* удовлетворяющих условию *ρ* *(М', М")* < δ, но| *f* *(М") — f* *(М')* | ≥ ε =>  для δ*n =* 1/*n* Ǝ *Мn'* и *Мn"* {*М*}:  *ρ* *(Мn', Мn")* < 1/*n,* но  | *f* *(Мn") — f* *(Мn')* | ≥ ε. Т.к. {*Мn'*} *‒* послед‒сть точек замкнутого ограниченного мн‒ва{*М*}, то по Т Больцано ‒ Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся к некоторой *А* подпослед‒сть {*Мkn'*}. Подпослед‒сть {*Мkn''*} послед‒сти { *Мn"*} также сходится к *А*. *f* (*М*) непрерывна в *А =>* {*f* (*Мkn'*)} → *f* (*А*) и {*f* (*Мkn''*)} → *f* (*А*) => {*f* (*Мkn'*) ‒ *f* (*Мkn''*)} ‒ бесконечно малая послед‒сть, это противоречит | *f* *(Мn") — f* *(Мn')* | ≥ ε => *и = f* (*М*) равномерно непрерывна на {*М*}. |

|  |  |
| --- | --- |
| **20. Понятие дифф-сти функции нескольких переменных. Достаточное условие дифф-сти. Касательная плоскость.**  *М* (*х1, ..., хт*) ‒ внутренняя точка области задания *и* = *f* (*х1, ..., хт*)*.* Отношение частного приращения Δ*xk* *u* в фикси­рованной  *М* (*х1, ..., хт*) к соответствующему приращению Δ*xk* аргумента *xk*  является ф-цией от Δ*xk*, определен­ной для всех, ≠ 0, значений Δ*xk*, для которых *М* (*x1, …, xk‒1, xk +* Δ*xk*, *xk+1*… , *xm*) области задания *и.*  ***О.*** *Если* Ǝ *предел отношения* (1) *част­ного приращения* Δ*xk* *u функции в М* (*х1, ..., хт*) *к соот­ветствующему приращению* Δ*xk* *аргумента xk при* Δ*xk* → 0, *то этот предел называется* ***частной производной*** *функции и* = *f* (*х1, ..., хт*) *точке М по аргументу хk* :  *Полное приращение*  *и = f* (*х1, ..., хт*) в *М* (*х1, ..., хт*)*,* соответ­ствующее приращениям Δ*x1* , …, Δ*xт* :  Δ*u =*  *f* (*х1 +* Δ*x1*, … , *хm +* Δ*xm*) ‒ *f* (*х1*, … , *хm*)  ***О****. Ф‒я и = f* (*х1, ..., хт*) *называется* ***диф­ференцируемой*** *в М* (*х1, ..., хт*), *если ее полное приращение в М можно представить*:  *где А1,* ..., *Ат ‒ некоторые не зависящие от* Δ*x1*, … , Δ*xm числа,* а *α1,* ..., *αт* ‒ *бесконечно малые при* Δ*x1 →*0, … , Δ*xm →*0*функции, равные 0 при* Δ*x1 =* … = Δ*xm =*0.  (2) ‒ *условие дифференцируемости* ф‒и в *М.* Другая форма:  где *ρ* ‒ бесконечно малая при Δ*x1 →*0, … , Δ*xm →*0 функция , *ρ* = 0 при Δ*x1 =* … = Δ*xm =*0. Условия (2) и (3) эквивалентны, т.к. : 1) при *ρ* ≠ 0  => сумма является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с *ρ*, *о* (*ρ*) =0 при *ρ* = 0.Т.о.(2) => (3)  2) пусть не все Δ*x1 ,…,* Δ*xm* равны 0 =>  и учитывая, что *αi* ‒ бесконечно ма­лая при *ρ* → 0 ( и при Δ*x1 →*0, … , Δ*xm →*0) функция, получим (2) => (3) =>(2)  Если хотя бы 1 из *А1,* ..., *Ат* отлично от 0, то *А1* Δ*x1 +* ...+ *Ат* Δ*xm* ‒ *главная, линейная относительно приращений аргументов* часть приращения дифференцируемой функции.  **Т1*.*** *Если и* = *f* (*х1, ..., хт*) *дифф-ма в М* (*х1, ..., хт*), *то в этой точке* Ǝ *част­ные производные по всем аргументам, причем*  , *где Аi определяются из условия* (2) *или* (3) *дифф‒сти функции.*  *Док‒во*. Из (2) => частное приращение функции в этой точке: | ***Сл1****. Условие* (3) *диффе-сти функции в М можно записать в форме* (все частные производные берутся в *М*)  ***Сл2****. Если и = f* (*х1, ..., хт*) *дифферен­цируема в М* (*х1, ..., хт*)*, то представление ее приращения* Δ *u* *в форме* (2) *или* (3) *единственно.* (т.к. коэффи­циенты *Аi* этих представлений = частным производным в данной *М =>* определяются единственным образом).  *Если и* = *f* (*х1, ..., хт*) *диф­ф-а в М* (*х1, ..., хт*), *то она и непрерывна в М.* (т.к. из (2) => => функция непрерывна в *М* )  *Пло­скость π, проходящая через точку N0 поверхности, называется* ***касательной плоскостью*** *в этой точке, если угол между этой плоскостью и секущей, проходящей через точку N0  и точку N1 поверхности, стремится к* 0*, когда N1* → *N0*.  Если в *N0* Ǝ касательная плоскость, то касательная в *N0* к кривой, расположенной на поверхности и проходящей через *N0*, лежит в указанной плоскости.  Убедимся, что из условия дифф‒сти функции *и = f* (*х, у*)в данной *М0* (*х0, у0*)=> существование касательной плоскости к графику *S* этой ф‒и в точке *N*0 (*х*0, *у0*, *u0*). Пусть Δ*x* = *х ‒* *х0*, Δ*y* = *y ‒* *y0* , Δ*u* = *u ‒* *u0* , где *и = f* (*х0, у0* ), *и = f* (*х, у*) *=>* условие (2):  *u ‒* *u0 = A*(*х ‒* *х0*) + *B*(*y ‒* *y0*) + *α*Δ*x + β*Δ*y= A*(*х ‒* *х0*) + +*B*(*y ‒* *y0*) + *o*(*ρ*)  где *A* и *В* ‒постоянные , *α* и *β* ‒ бесконечно малые при Δ*x→* 0, Δ*y→* 0,  Уравнение *U ‒* *u0 = A*(*х ‒* *х0*) + *B*(*y ‒* *y0*) опре­деляет в декар-товой системе (*х, у, U*)некоторую плоскость π, проходящую через *N*0 (*х0*, *у0*, *u0*) и имеющую нормальный вектор **n** = {*A*, *В, ‒* 1}.  Косинус угла φ между **n** и вектором *N0 N1* секущей с координатами *х ‒* *х0*, *y ‒* *y0*, *и ‒ и0* :  Из условия дифференцируемости *и = f* (*х, у*) => *A*(*х ‒* *х0*) +  +*B*(*y ‒* *y0*) ‒ (*u ‒* *u0*) = *o*(*ρ*) =>  => , т. е. и π ‒ касательная плоскость к *S* в точке *N0 .*  Т.о., дифф-сть *и = f* (*х, у*)в *М0* (*х0, у0*)геометрически означает наличие касательной плоскости к графику функции *и = f* (*х, у*)в точке *N*0 (*х0*, *у0*, *u0*).Т.к. *А* и *В =* производным, вычисленным в  *М0* (*х0, у0*)*,* то уравнение каса­тельной плоскости :  Нормальный вектор **n** = { , *, ‒* 1} касательной плоскости называется ***нормалью***кповерхности *и = f* (*х, у*)в *N*0 (*х0*, *у0*, *u0*).  **Т2****(достаточное условие дифф‒сти).** *Если и = f* (*х1, ..., хт*) *имеет частные производные по всем аргументам в некоторой окрестности М0* (*х*1*°*, ..., *хт°*)*, причем все эти частные производные непре­рывны в М0, то функция дифф‒ма в М0 .*  *Док‒во*. Для ф‒и 2 переменных *и = f* (*х, у*)*.* Пусть *fx'* и *fy'* Ǝ в ок-рестности *М0* (*х0, у0*)и непрерывны в ней. Дадим *х* и *у* столь малые приращения Δ*х* и Δ*у*, чтобы *М* (*х0 +* Δ*х*, *у0 +* Δ*у* ) этой окрестно­сти *М0.* Полное приращение  Δ*u = f* (*х0 +* Δ*х*, *у0 +* Δ*у*)‒ *f* (*х0*, *у0* ) =[ *f* (*х0 +* Δ*х*,  *у0 +* Δ*у*)‒ *f* (*х0*, *у0 +* Δ*у*)] +[*f* (*х0*, *у0 +* Δ*у* ) ‒ *f* (*х0*, *у0* )]  Выражение [ *f* (*х0 +* Δ*х*, *у0 +* Δ*у*)‒ *f* (*х0*, *у0 +* Δ*у*)] ‒ прира-щение ф-ции *f* (*х0*, *у0 +* Δ*у*) пере­менной *х* на [*х*0, *х*0 *+* Δ*х*]. Т.к. *и = f* (*х, у*)имеет частные производные, то *f* (*х0*, *у0 +* Δ*у*) дифф-ма и ее производная по *х* ‒ это *fx'*. По Т Лагранжа, Ǝ такое *θ*1 из  0 < *θ*1 < 1: [ *f* (*х0 +* Δ*х*, *у0 +* Δ*у*)‒ *f* (*х0*, *у0 +* Δ*у*)] =  = *fx'* (*х0 +* *θ*1Δ*х*, *у0 +* Δ*у*) Δ*х*  Ан‒но, для некоторого *θ*2 из 0 < *θ*2 < 1:  [*f* (*х0*, *у0 +* Δ*у* ) ‒ *f* (*х0*, *у0* )] = *fy'* (*х0*, *у0 +* *θ*2Δ*у* ) Δ*у*  *fx'* и *fy'* непрерывны в *М0 =>*  *fx'* (*х0 +* *θ*1Δ*х*, *у0 +* Δ*у*) = *fx'*(*х0* , *у0* ) + α,  *fy'* (*х0*, *у0 +* *θ*2Δ*у* ) = *fy'* (*х0*, *у0* ) + *β,*  где *α* и *β* ‒ бесконечные малые при Δ*x→* 0, Δ*y→* 0 =>  Δ*u = fx'* (*х0* , *у0* ) Δ*х + fy'* (*х0*, *у0* ) Δ*у + α* Δ*х* + *β* Δ*у*  *=>* *и = f* (*х, у*) дифф‒ма в *М*0. |

|  |  |
| --- | --- |
| **21. Дифференцирование сложной функции нескольких переменных. Инвариантность формы 1‒го дифференциала.**  ***О.*** *Ф‒я и = f* (*х1, ..., хт*) *называется* ***диф­ференцируемой*** *в М* (*х1, ..., хт*), *если ее полное приращение в М можно представить в виде*  *где А1,* ..., *Ат ‒ некоторые не зависящие от* Δ*x1*, … , Δ*xm числа,* а *α1,* ..., *αт* ‒ *бесконечно малые при* Δ*x1 →*0, … , Δ*xm →*0*функции, равные* 0 *при* Δ*x1 =* … = Δ*xm =*0.  *А1* Δ*x1 +* ...+ *Ат* Δ*xm* ‒ *главная, линейная* относительно приращений аргументов часть.  ***О.******Дифференциалом dи*** *дифф‒мой в М* (*х1, ..., хт*)  *ф‒и*  *и = f* (*х1, ..., хт*) *называется главная линейная относительно приращений аргументов часть приращения этой функции в М. Если в представлении* (1) *все коэффициенты Аi  = 0, то dи =* 0 *в М.*  *dи* = *А1* Δ*x1 +* ...+ *Ат* Δ*xm* =  Дифференциал *dхi* независимой переменной *хi ‒* (не зависящее от *х1, ..., хт*)число. Пусть *dхi =* Δ*xi* =>  Cложная функция вида *и = f* (*х1, ..., хт*), где *x1 = φ1*(*t1, …, tk*), …, *xm = φ1*(*t1, …, tk*) **(3)**  **Т1.** *Пусть функции* (3) *дифф‒мы в не­которой М* (*t*1*°*, ..., *tk°*), *а*  *и = f* (*х1, ..., хт*) *дифф‒ма в соотв‒щей N* (*х*1*°*, ..., *хт°*)*, где*  *хi° = φi*(*t*1*°*, ..., *tk°*), *i* = 1, ..., *т*. *Тогда* *сложная ф‒я и = f* (*х1, ..., хт*) *, где х1, ..., хт определяются формулами* (3), *дифф‒ма в М. При этом частные производные этой сложной функции в М* :  *…..* **(4)**  *в которых все берутся в точке N, а все - в точке М.*  *Док‒во.* Придадим аргументам *t1, …, tk* в точке *М* (*t*1*°*, ..., *tk°*) приращения Δ*t1* ,…, Δ*tk*, одновременно ≠ 0. Им соответствуют приращения Δ*x1 ,* ...,Δ*xm* функций (3) в *М.* Им соответствует прираще­ние Δ*u* в *N.* Т.к. *и = f* (*х1, ..., хт*)дифференцируема в *N* =>  где берутся в *N,*  *α1,* ..., *αт* ‒ бесконечно малые при Δ*x1 →*0, … , Δ*xm →*0функции, равные 0 приΔ*x1 =* … = Δ*xm =*0.  Т.к. ф‒и (3) дифф‒мы в *М* (*t*1*°*, ..., *tk°*), приращения Δ*x1 ,* ...,Δ*xm*  :  где берутся в *М,* а  Надо убедиться, что после подстановки в правую часть (5) выражений (6) приращение Δ*u*  будет  где  Тогда теорема будет доказана, т.к (7) означает дифф‒ть сложной функции, а (8) ‒ это ее частная производная. При подстановке в правую часть (5) выражений (6), кроме группы слагаемых полу­чаются и другие группы слагаемых. Но они являются величиной *о* (*ρ*), т.к. | 1°. *Все в* (5) *берутся в N, т. е. являются постоянными числами, которые при умножении на о* (*ρ*) *дают о* (*ρ*).  2°. *Из* (6) => *все* Δ*xi* (*i* = 1, ..., *т*) *удовлетворяют* | Δ*xi* | ≤ const *ρ*.  3°. *Все αi  в* (5) ‒ *бесконечно ма­лые при ρ* →0 *функции*, т.к. все *αi* ‒ бесконечно малые при Δ*x1 →*0, … , Δ*xm →*0. Но все ф‒и (3) дифф‒мы => непрерывны в *М =>* Δ*x1 →*0, … , Δ*xm →*0при *ρ* → 0.  4°. Из пп. 2° и 3° => *каждое αi* Δ*xi* *является величиной о* (*ρ*).  ***З.*** Если ф‒и (3) зависят от 1 аргумента *t*, то *u ‒* сложная ф‒я 1 переменной *t* : *и* = *f* (*х1, ..., хт*)*,* где *xi = φi* (*t*). Ее производная :  Ф‒я *и = f* (*х1, ..., хт*), заданная на мн‒ве {*М*}*,* называется *однород-ной функцией степени р* на {*М*}, если для *М* (*х1, ..., хт*) {*М*}и для *t*: *N* (*t х1, ..., t хт*) {*М*}выполняется  *f* (*t х1, ..., t хт*) = *t p f* (*х1, ..., хт*) **(10)**  **Т2 (*Эйлера об однородных функциях*).***Если и = f* (*х1, ..., хт*) *явля-ется в некоторой области* {*М*}*дифф‒ой однородной функцией степени р, то в М* (*х1, ..., хт*){*М*} *справедливо равенство*  *Док‒во*. Пусть *М0* (*х*1*°*, ..., *хт°*) ‒ точка области {*М*}*.* Рассмот-рим сложную ф‒ю *и = f* (*х1, ..., хт*)*,* где *xi = t хi°* (*i* = 1, ..., *т*), т. е.  *и = f* (*t х*1*°*, ..., *t хт°*). Т.к. при *t* = 1 ф‒и *xi = t хi°* диф­ф‒мы и  *и = f* (*х1, ..., хт*) диф‒ма в соответствующей *М0,* то, по Т1 и заме­чанию, можно вычислить в точке *t =* 1 по (9).  где берутся в *М0. С* другой стороны, в силу (10):  *и = f* (*t х*1*°*, ..., *t хт°*) = *t p f* (*х*1*°*, ..., *хт°*) **(13)**  Из (13) =>  *= p t p‒1 f* (*х*1*°*, ..., *хт°*), т. е.  Из (12) и (14) => (11) для произвольной *М0 =>* теорема доказана.  *Инвариантность формы 1‒го дифференциала***:** формула  универ­сальна и справедлива, когда *х1, ..., хт* ‒ дифф‒мые функции новых переменных *t1, …, tk .*  Пусть аргументы  *х1, ..., хт* ф‒и *и* = *f* (*х1, ..., хт*) являются дифф‒мыми в *А* (*t*1*°*, ..., *tk°*) функциями *xi = φi* (*t1, …, tk*), и *и = f* (*х1, ..., хт*) дифф‒ма в *В* (*х*1*°*, ..., *хт°*), где *хi°* = *φi*  (*t*1*°*, ..., *tk°*) =>  *и ‒* сложная функция аргументов *t1, …, tk*, по Т1 дифф‒ма в *А =>* ее дифференциал :  где определяются из (4). Подставляя из (4) в (16) и собирая коэффициенты при получим  Коэффициент при = дифференциалу *dxi* ф-ции *xi = φi* (*t1, …, tk*) => получим для дифференциала *dи* сложной функции формулу (15), в которой дифференциалы *dxi* будут дифференциалами функций *xi = φi* (*t1, …, tk*). |

|  |  |
| --- | --- |
| **22. Производная по направлению. Градиент.**  Пусть *и = f* (*х, у, z*)3 переменных *х, у* и *z* задана в некоторой окрест­ности *М0* (*х0, у0, z0*). Рассмотрим некоторое направление, определяемое единичным вектором **а** с координатами {cos α, cos β, cos γ}. Проведем через *М0* ось **1**, направление которой совпадает с направлением **а**, возьмем на этой оси  *М* (*х, у, z*)и пусть *l ‒* величина направленного отрезка *М0М*. Координаты *х, у, z* точки *М* :  *x* = *x*0 ‒ *l* cos α, *y* = *y*0 ‒ *l* cos β, *z* = *z*0 ‒ *l* cos γ **(1)**  На оси **1** ф‒я *и = f* (*х, у, z*) ‒ сложной ф‒я одной переменной *l*. *Если эта функция имеет в l =* 0 *производную по переменной l*, *то эта производная называется* ***производной по направлению*****1** *от*  *и* = *f* (*х, у, z*) *в М0 :*  ***Градиентом*** *дифф‒мой в точке М0* (*х0, у0, z0*) *функции и* = *f* (*х, у, z*) *в М0 называ­ется вектор*  grad *u, имеющий координаты,* *соответственно равные производным* , , , *взятым в М0* :  Т.к. вектор **а**, определяющий направление оси **1**, имеет координаты {cos α, cos β, cos γ}, представим выражение (2) в виде скалярного произведения векторов grad *и* и **а**:  Покажем, что *градиент функции и* = *f* (*х, у, z*) *в точке М0 характе­ризует направление и величину максимального роста этой ф‒и в М0*,т.е., производная функции *и* в *М0* по направлению, определяемому градиентом этой функции в *М0*, имеет максимальное значение по сравнению с производной по другому направлению в *М0*, а зна­чение указанной производной равно длине вектора | grad *и* |*.* Перепишем (3) в виде  где φ ‒ угол между grad *и* и **а** *=>* максимальное значение производной по направлению при  cos φ = 1, т. е. когда на­правление **а** совпадает с направлением grad *и,* при этом  ***З.*** Для ф‒и *и = f* (*х, у*)2 перемен­ных *х* и *у* единичный вектор **а**, определяющий направление в *М0,* имеет координаты {cos α, sin α} => (2) принимает вид  Для ф‒и 2 переменных градиент дифф‒мой функции *и* (*х, у*)‒ вектор с координатами , формула (3) также справедлива. Для функции *и = f* (*х1,* ..., *хт*) *т* переменных *х1,* ..., *хт* аналогично. Производная в *М0* (*х*1*°*, ..., *хт°*)по направлению **1**, которое задается единичным вектором **а** = {cos α1, …, cos αm} (где  cos2 α1 + …+ cos2 αm = 1), определяется как про­изводная по *l* сложной ф‒и *и* = *f* (*х1,* ..., *хт*) *,* где  *x*1 = *x*1*°* ‒ *l* cos α1 , …, *xm* = *xm°* ‒ *l* cos α*i .* Если  *и = f* (*х1,* ..., *хт*) *‒* дифф‒мая функция, для производной по направлению :  Градиентом ф‒и в данной *М0* (*х*1*°*, ..., *хт°*)называется вектор  производные берутся в *М0*. Также справедлива (3). |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **23. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Теоремы о равенстве смешанных производных.**  Пусть у *и =f* (*х1,* ..., *хт*)*,* опре­деленной в области {*М*}*,* в {*М*}  Ǝ по *xi* => ‒ функция от *х1,* ..., *хт ,* тоже определенная в {*М*}. Если она имеет частную производную по *хk* в некоторой  *М*  {*М*}, то ее называют **2‒ой частной производной** *и* = *f* (*х1,* ..., *хт*)в *М* сначала по *хi,* а затем по *хk*:  *п*‒я частная производная вводится *индуктивно.* Если введено понятие (*п ‒* 1)‒й частной производной ф‒и *и =f* (*х1,* ..., *хт*) по *хi1,* ..., *хi(n‒1)* и она имеет в *М* частную производную по  *хin* , то ее на-зывают *п*‒й частной производной *и* = *f* (*х1,* ..., *хт*)в *М* по *хi1,* ..., *хin*  Если не все *i1,* ..., *in* совпадают, то част. производная ‒***смешанная***  *Ф‒я и = f* (*х1,* ..., *хт*) *называется* ***п раз дифф‒мой*** *в М0* (*х*1*°*, ..., *хт°*)*, если все частные производные* (*п ‒* *1*)*‒го по­рядка этой ф‒и являются дифф‒мыми функциями в М0.*  ***У.*** *Чтобы и = f* (*х1,* ..., *хт*) *была п раз дифф‒емой в М0* (*х*1*°*, ..., *хт°*)*, достаточно, чтобы все ее частные производные п‒го порядка были непрерывными в М0.* (=> из определения дифф‒сти функ­ции и теоремы о достаточных условиях дифф‒сти)  ***Т1.*** *Пусть и* = *f* (*х, у*) *дважды дифферен­цируема в М0* (*x0*, *у0*)*. Тогда в М0  = .*  *Док‒во*. *и* =  *f* (*х, у*)дважды дифф‒ма в *М0* (*x0*, *у0*) => *fx'* и *fy'*определены в окрестности *М0* и дифф‒мы в *М0*. Рассмотрим  Ф=*f* (*х0+h, у0+h*)‒ *f* (*х0+h, у0* )*‒ f* (*х0, у0+ h*)+ *f* (*х0, у0* ) **(1)**  где *h ‒* столь малое число, что *М* (*х0* + *h, у0* ‒ *h*)находится в этоой окрестности *М*0. Ф ‒ приращение Δφ = φ (*х0* + *h*) ‒ φ (*x*0) дифф‒мой на [*x*0, *x*0 + *h*]ф‒и φ (*х*) *= f* *(х, у0* + *h*) ‒ *f* (*х, у0* )переменной *х =>* по Т. Лагранжа, Ǝ *θ*  из 0 < *θ* < 1:  Ф = Δφ = φ*'* (*х0* + *θh*)*h =* [ *fx'*(*х0* + *θh*, *у0 + h*) ‒  ‒*fx'*(*х0* + *θh*, *у0* )]*h =*{[ *fx'*(*х0* + *θh*, *у0 + h*) ‒ *fx'*(*х0, у0* )] ‒  ‒ [ *fx'*(*х0* + *θh*, *у0* ) ‒ *fx'*(*х0, у0* )]}*h* **(2)**  Т.к. *fx'* дифф‒ма в *М0* => [ *fx'*(*х0* + *θh*, *у0 + h*) ‒ *fx'*(*х0, у0* )] =  (*х0, у0* ) *θh +*(*х0, у0* )*h + α1 θh +*  *+β1 h*[ *fx'*(*х0* + *θh*, *у0* ) ‒ *fx'*(*х0, у0* )] = (*х0, у0* ) *θh+α2 θh*  где *α1*, *β1*, *α2* ‒ бесконечно малые при *h →* 0 . Подставляя в (2):  Ф = [(*х0, у0* ) *+ α*] *h2* **(3)**  где *α* = *α1 θ + β1 ‒ α2 θ*  ‒ бесконечно малая при *h →* 0 функция. С др. стороны, (1) для Ф ‒ приращение Δψ = ψ(*y0* + *h*) ‒ ψ (*y*0) дифф‒мой на [*y*0, *y*0 + *h*]ф‒и ψ (*y*) *= f* *(х0 +h, у*) ‒ *f* (*х0, у*):  Ф = [(*х0, у0* ) *+ β*] *h2* **(4)**  где *β* ‒ бесконечно малая при *h →* 0. (3) = (4) и сократить на *h2* :  (*х0, у0* ) *+ α =* (*х0, у0* ) *+ β*  α и β‒бесконечно малые при *h→*0 => (*х0, у0* ) *=* (*х0, у0* )  ***Т2.*** *Пусть и= f* (*х1,* ..., *хт*) *п раз дифф‒ма в М0* (*х*1*°*, ..., *хт°*)*. Тогда в М0 значение смешанной частной производной п‒го порядка не зависит от порядка последовательных дифференцирований.*  *Док‒во*. Достаточно доказать для *2* последо­вательныхдифф-ний:  Т.к‒ дважды дифф‒мая ф‒я переменных и , то по Т1  => справедливость (5).  *Дифф‒лы высших порядков*. 1‒й дифференциал дифф‒мой в  *М* (*х1,* ..., *хт*)ф‒и *и* = *f* (*х1,* ..., *хт*) :  Пусть правая часть (6) ‒ функция от *х1,* ..., *хт,* дифф‒мая в *М* (*х1,* ..., *хт*)*.* Достаточно, чтобы *и = f* (*х1,* ..., *хт*)была 2 раза дифф‒ма в *М,* а аргументы были либо независимыми переменными, либо 2 раза дифф‒мыми ф‒ями некоторых независимых пере­менных.  ***О1.*** *Значение* δ (*dи*) *дифференциала от 1‒го диф­ференциала* (6), *взятое при* δ*х1* =  *dх1,* ..., δ*хm* =  *dхт , называется* ***2‒ым дифференциалом*** *ф‒и и=f* (*х1,* ..., *хт*)(*в данной М* (*х1,* ..., *хт*) | Пусть введен дифференциал *d п‒1и* порядка *п* ‒ 1 и *и = f* (*х1,* ..., *хт*) *п* раз дифф‒ма в данной *М* (*х1,* ..., *хт*), а ее аргументы или независи-мые переменные, или *п* раз дифф-мые функции некоторых независимых переменных.  ***О2****. Значение* δ (*d n‒*1*и*) *дифференциала от* (*п ‒* 1*)‒го дифференциа-ла d n‒*1*и, взятое при* δ*х1* =  *dх1,* ..., δ*хm* =  *dхт , называется п‒м дифференциалом и= f* (*х1,* ..., *хт*) *в М*:  При вычислении 2‒го и последующих дифференциалов 2 случая:  **1)** *х1,* ..., *хт* ‒ независимые переменные => *dх1,* ..., *dхт* не зависят от *х1,* ..., *хт .* Каждый *dхk*  можно взять = одному и тому же приращению Δ*хk* для *М* (*х1,* ..., *хт*) =>  ***З1***. По индукции для *п*‒го дифференциала:  **2)** *х1,* ..., *хт* ‒ соответствующее число раз дифф‒мые функции независимых переменных *t1,* ..., *tk*. :  Из (11) и (10) => 2‒й и последующие дифференциалы не обладают свойством инва­риантности формы, но обладают этим свойством, если *х1,* ..., *хт* ‒ *линейные функции* независимых переменных *t1,* ..., *tk* , т.к. частная производная выше 1‒го порядка от линей­ной ф‒и =0 и *d2xi =* 0, …, *d mxi =* 0. |
| **24. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.**  Дифф-л *k*‒го порядка ф‒и *и = f* (*х1,* ..., *хт*)в *М* : *d ku|M*  **Т*.*** *Пусть ф‒я и = f* (*М*) *= f* (*х1,* ..., *хт*) *задана в некоторой ε ‒ окрестности*  *М0* (*х*1*°*, ..., *хт°*)и *n+*1 *раз* *дифф‒ма в этой ε‒окрестности. Тогда пол­ное приращение* Δ*u* = *f* (*М*) *‒ f* (*М0*) *этой* *функции в М0 для точки М из этой ε‒окрестности можно пред­ставить в следующей форме:*  *где N ‒* *некоторая точка ε ‒ окрестности, завися­щая от М0* , *а дифференциалы dxi  переменных хi , входящие в d ku|M  и d n+1u|N , равны* Δ*xi = xi ‒ хi°.*  *Док‒во.* Проведем для *и = f* (*х, у*)2 переменных *х* и *у.* Формула Тейлора для *п* + 1 раз диф‒мой в некоторой окрестности *t*0 функции *u* = *F* (*t*) одной переменной *t* с центром разложения в *t*0 (остаточный член в форме Лагранжа), 0 < *θ* <1:  *t* ‒ независимая переменная => приращение Δ*t =t ‒ t0* ‒ дифференциал *dt* независимой переменной *t =>*  Обозначим Δ*u = F* (*t*) ‒ *F* (*t0*), согласно (3), формулу Тейлора (1) можно записать в форме:  Рассмотрим в ε‒окрестности *М0* (*х0, у0*) точку  *М* (*х0 +*Δ*x, у0+*Δ*y*)и соединим точки *М0* и *М* прямой ли­нией => координаты *х* и *у* точек этой прямой ‒ линейные функцииновой переменной *t* :  *х* = *х0 +t*Δ*x* , *y = у0+t*Δ*y* **(5)**  при этом координаты точек отрезка *М0М* соответствуют значениям переменной *t* из сегмента [0, 1]. Значению *t* = 0 отве­чает точка *М0,* а значению  *t* = 1 ‒ точка *М.* Т.к. по условию *и = f* (*х, у*)двух переменных *х* и *у* в ε‒окрестности точки *М0 п* + 1 раз дифф‒ма, то из (5) => на прямой *М0М* эта функция является сложной функцией переменной *t*, (*п* + 1) раз дифф‒мой для всех значений *t* из [0, 1]. Обозначим эту сложную функцию через *F* (*t*) и запишем для нее формулу Тейлора с цен­тром разложения в *t*0 = 0 в форме (4) при Δ*u = F* (1) ‒ *F* (0) = *f* (*М*) ‒ *f* (*М0*)  Фигурирующие в (4) дифференциалы различных поряд­ков являются дифференциалами сложной функции *и* = *f* (*х, у*) *,* где *х* и *у* ‒ линейные функции (5) => дифферен­циалы порядка ф­‒и *и = f* (*х, у*):  В (6) *dx* и *dу* находятся из (5) при *dt* = Δ*t* = 1 ‒ 0 = 1 => в (6): *dx = dt* Δ*x =* Δ*x*, *dy = dt* Δ*y =* Δ*y* **(7)**  Подставляя и из (6) в (4) и учитывая (7), получим формулу Тейлора (1).  Развернутое выражение формулы Тейлора : |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **25. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.**  **Т*.*** *Пусть п* ≥ 1 ‒ *целое число, u = f* (*М*) *= f* (*х1,* ..., *хт*) *задана и* (*п ‒* 1) *раз диф*‒*ма в ε‒окрестности М0* (*х*1*°*, ..., *хт°*) *и п раз диф*‒*ма в М0*. *Тогда* *для точки М из ε ‒ ок­рестности М0 :*  *где ρ* ‒ *расстояние ρ* (*М0, М*)*, о* (*ρn*) ‒ *бесконечно малая при ρ* →0 (*при М* → *М0*) *ф*‒я *более высокого порядка малости, чем ρn*.  ***З.*** В более подробной записи:  В правой части (2) ‒ сумма многочлена сте­пени *п* от *т* переменных  *х1,* ..., *хт* и остаточного члена *о* (*ρn*). Обозначим:  Теорема будет доказана, если установить, что при выполнении условий теоремы *Rn*+1(*М*) = *о* (*ρn*) .  **Л1***. Если f* (*М*) *= f* (*х1,* ..., *хт*) *п раз диф-ма в М0* (*х*1*°*, ..., *хт°*)*, то как сама ф-я Rn*+1(*М*)*, определяемая равенством* (3), *так и все ее частные производные по переменным х1,* ..., *хт до порядка п вклю­чительно обращаются в 0 в точке М0.*  *Док‒во*. При *п* = 1 функция (3) :  и *R2* (*М0*) = 0, (*М0*) = 0 (*i =* 1, ..., *т*) проверяются элементарно. Далее по индукции. Пусть лемма справед­лива для некоторого *п* ≥ 1.  Пусть *f* (*М*)(*п* + 1) раз диф-ма в точке *М0* и  *Rn+*2 (*М0*) = 0, т.к. в (4) каждая (*хi* - *хi°* )= 0 в точке *М0.* Надо доказать, что для *i* = 1, ..., *т* ф-я (*М*)и все ее частные производные до *п* включительно обращаются в 0 в *М0,* для этого в силу индуктивного предположениядостаточно доказать, что (*М*)определяется равенством типа (3):  Т.к. все *хi* (*i* = 1, ..., *т*) равноправны и вхо­дят в (4)симметрично, то достаточно доказать (5) для *i* = 1:  Из (4) => для док-ва (6) достаточно убедиться: для *k* = 1, .... *п* + 1 при фик­сированных *х*2*, х*3*,* ..., *хт* | Т.к. при дифференцировании по *х*1переменные *х*2, *x*3, ..., *хт*  фиксированы, то величину  при дифференцировании по *х*1можно рассматривать как постоян­ную. Т.к. символы , ..., используются для образования частных производных функции *f* в фиксированной *М0,* то при дифферен­цировании по *х*1 указанные символы также нужно рассматривать как постоянные величины => для док-ва (7) доста­точно убедиться в справедливости равенства  Дифференцируя ф-ю по *х*1как слож­ную и учитывая независимость от *х*1символов *D* и , получим (8).  **Л2**. *Пусть R* (*М*) *= R* (*х1,* ..., *хт*) *‒*  *функция, удовлетворяющая :*  1) *R* (*М*) *п раз дифференцируема в точке М0* (*х*1*°*, ..., *хт°*)*,*  2) *сама функция R*(*М*) *и все ее частные производные по из переменных х1,* .... *хт до порядка п включительно обращаются в 0 в точке М0. Тогда для функции R* (*М*) *справедлива оценка*  *R* (*М*) = *о* (*ρn*) **(9)**  *где ρ* - *расстояние ρ* (*М0, М*)*.*  *Док‒во*. При *п =* 1 утверждение леммы выте­кает из условия дифф-сти ф-и *R*(*М*) в *М0* :  Учитывая, что *R*(*М0*) = 0, (*М0*) = 0 для *k* = 1, ..., *m*, получим: *R*(*М*) *= о* (*ρ*). Дальше по индукции. Пусть Л2 справед­лива для некоторого *п ≥* 1 и *R*(*М*) удовлетворяет требованиям Л2 для *п +*1 => (*М*) удовлетворяет требованиям Л2 для *n* =>  Т.к. *п ≥* 1, то *п +* 1 *≥* 2 и *R*(*М*), удовлетворяющая требованиям Л2 для *п* + 1, хотя бы 1 раз дифф-ма в окрест­ности *М0*  => выполнены условия разложения по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для *п =* 0, т.е для *М* из достаточно малой ε ‒окрестности *М0* на отрезке *М0М* Ǝ *N* :  *N* лежит между *М0* и *М* и *ρ* = *ρ* (*М0, М*) => *ρ* (*М0, N* ) ≤ *ρ* => из (10) =>  *Док‒во теоремы*. В силу Л1 сама функция (3) и все ее частные производ­ные по переменным *х1,* ..., *хт* до порядка *п* включительно обращаются в 0 в точке *М0.* Но тогда в силу Л2 для функ­ции (3) справедлива оценка *Rn*+1(*М*) = *о* (*ρn*). |

|  |  |
| --- | --- |
| **26. Экстремум функции нескольких переменных.**  *и = f* (*М*)определена в некоторой окрестности *М0* (*х*1*°*, ..., *хт°*)пр‒ва *Е т.*  ***О1****. Ф‒я и* = *f* (*М*) *имеет в М0* ***локальный максимум (минимум****), если* Ǝ *ε ‒ окрестность М0, в пределах которой значение f* (*М0*) *является наибольшим (наимень­шим) среди всех значений ф‒и.*  ***О2****. Ф‒я и = f* (*М*) *имеет в М0* ***локальный экстремум****, если она имеет в М0 либо локальный максимум, либо локальный минимум.*  ***У1* (*необходимое условие экстремума*)*.*** *Если и = f* (*М*) *обладает в*  *М0* (*х*1*°*, ..., *хт°*) *частными производными 1‒го порядка по всем х1,* ..., *хт и имеет в М0 локальный экстремум, то:*  *Док‒во.* У *f* (*х1,* ..., *хт*)зафиксировать: *х*2= *x*2*°*, ..., *хm* = *xm°* => получим ф‒ю 1 переменной *х*1*.* Ее производная в *х*1= *x*1*°* совпадает с (*М0*)*.* Т.к. функция *т* переменных имеет локальный экстремум в *М0*, то ф‒я 1 переменной имеет локальной экстремум в *х1* = *x1°* => ее производная в этой точке=0. Остальные равенства аналогично.  ***У1\*.*** *Если и = f* (*М*) *дифф‒ма в М0 и имеет в М0 локальный экстремум, то дифференциал dи|M0 ≡* 0 *относительно диффе­ренциалов независимых переменных dx1, …, dxm .* (т.к.  то из (1) => при  *dx1, …, dxm* справедливо *dи|M0* = 0).  Если *х*1*,* .... *хт* 2 раза дифф‒мой ф‒и ‒ независимые переменные или линейные ф‒и некоторых независимых переменных, то 2‒ой дифференциал этой ф‒и в данной *М0* является квадратичной формой относительно дифференциалов аргумен­тов *dx1, …, dxm* :  **Т(*достаточные условия локального экстремума*)***. Пусть функция*  *и* = *f* (*М*) *= f* (*х1,* ..., *хт*) *1 раз дифф‒ма в некоторой окрестно­сти*  *М0* (*х*1*°*, ..., *хт°*) *и 2 раза дифф-ма в самой М0. Пусть М0 ‒ точка возмож­ного экстремума, т. е. =* 0. *Тогда, если 2‒й дифференциал* (2) *является по­ложительно (отрицательно) определенной КФ от переменных dx1, …, dxm , то и = f* (*М*) *имеет в М0 локальный минимум* (*максимум*)*. Если 2‒й дифф-ал* (2) *‒ знакопере‒менная КФ, то и = f* (*М*) *не имеет локального экстремума в М0.*  *Док‒во.* **1)** Пусть 2‒й дифференциал (2) ‒ по­ложительно определенная КФ от *dx1, …, dxm.* Разложим *и = f* (*М*)в окрестности *М0* по фор­муле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано при *п* = 2  где *dxk* = *хk ‒* *xk°* в выражения для и , а *ρ* :  *М0* ‒ точка возможного экс­тремума =>  *=* 0 => полагая в (2)  *dxk* = *хk ‒* *xk°,* (3) примет вид:  Если для малых *ρ* правая часть (5) > 0, то в малой окрестности *М0* :  *f* (*М*) *‒* *f* (*М0*) > 0 => *и = f* (*М*)имеет в *М0* локальный ми­нимум.  Пусть *hi* = (*хk ‒* *xk°*) / *ρ* , *i =* 1, ..., *т* => из (4) :  | *hi* | ≤ 1, *h12 +…+ hm2* = 1 **(6)**  (5) можно переписать: | КФ Ф = ‒ функция, определенная и непрерывная на поверхности единичной сферы (6), являющейся замкнутым и ограни‒ченным мн‒вом. По 2‒й Т Вейерштрасса эта ф‒я достигает на этом мн‒ве своей ТНГ μ, и из положительной определенности КФ Ф и из того, что *h*1*,* ..., *hт,* удовлетворяющие (6), ≠ 0 одновременно => ТНГ μ>0 Т.к. бесконечно малая при *ρ* → 0 функция α (*ρ*) при всех малых *ρ* :  | α (*ρ*) | < μ, то вся правая часть (5) > 0 при этих *ρ*, т. е. при всех *М*, достаточно близких к *М0* => *и = f* (*М*)имеет в *М0* локальный минимум.  **2)** Доп. св‒во: *если КФ* Ф (*h*1*,* ..., *hт*) = *знакопере*‒*менна, то* Ǝ *2 совокупности переменных* (*h*1'*,* ..., *hт*' ) *и* (*h*1''*,* ..., *hт*'' ):  *причем* , **(8)**  Из определения знакопеременной КФ => Ǝ 2 совокупности (*t*1'*,* ..., *tт*' ) и (*t*1''*,* ..., *tт*'')*,* состоящие из чисел, одновременно ≠ 0, и такие, что  , . Положив  и учитывая, что из определения КФ =>  получим неравенства (8), из (9) => (7). Доп. свойство доказано.  Зафиксируем 2 совокупности (*h*1'*,* ..., *hт*' ) *и* (*h*1''*,* ..., *hт*'' ), удовлетво‒ряющие (7) и (8), и докажем, что для *ρ* > 0 найдутся *М'* (*x*1'*,* ..., *xт*' )и *М"* (*x*1''*,* ..., *xт*'' ) пр‒ва *Е т* : *ρ* (*М', М0*)= *ρ* (*М", М0*) *= ρ*, причем  Положив для *ρ* > 0 и для всех *i* :  удовлетворим соотношениям (10), причем в силу (7) справедливы:  Беря в точках *М'* и *М*" для *и = f* (*М*) разложение в окрестности *М*0 по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, получим вместо (5) разложения, справедливые для всех достаточно малых *ρ* > 0:  Для точки *М"* все ан‒но. Учитывая (8) и что , не зависят от *ρ* и *ρ* (*М', М0*)= *ρ* (*М", М0*) *= ρ*, получим из (11), что для как угодно малого *ρ* >0 : *f* (*М* ') > *f* (*М*0) и *f* (*М"*)< *f* (*М*0) => отсутствие экстремума в *М0.*  ***З***. *Требование ≥* 0( *≤* 0) *является необходимым условием локального минимума* (*максимума*) *в М0 дважды дифференцируемой в этой точке ф‒и и = f* (*М*)*.*  Пусть *f* (*М*)имеет в *М0* локальный минимум, но условие  *≥* 0 не выпол­нено => Ǝ *h*1,.... *hт* :  Функция *F* (*t*) = *f* (*x1°* + *th1*, …, *xm°* + *thm*), определенная при всех *t*, достаточно малых по модулю, обязана иметь локальный минимум в точке *t* = 0, чему противоречит  *<* 0  ***Утверждение.*** *Пусть ф‒я двух переменных и* = *f* (*х, у*) *1 раз дифф‒ма в окрестности М0* (*х°, у°*) *и 2 раза дифф‒ма в самой М0 и пусть М0 ‒ точка возможного экстре­мума. Тогда, если в М0 выполнено условие а*11*а*22 *‒* *a*212 > 0, *то и = f* (*х, у*) *имеет в М0 локальный экстремум* (*максимум при а11* < 0 *и минимум при а11* > 0). *Если а*11*а*22 *‒* *a*212 < 0 *в М0* , *то и* = *f* (*х, у*) *не имеет в М0 локального экстремума*. |

|  |  |
| --- | --- |
| **27. Теорема о существовании и дифф-сти неявно заданной ф-и.**  Если переменная *и* является по смыслу задачи ф‒ей аргументов *х, у,* ..., но задается уравнением *F* (*и, х, у,* ...) = 0, то ф-я *и* ***задана неявно****.*  *R* ‒ пр‒во перемен­ных (*и, х, у,* ...), *R*' ‒ пр‒во переменных (*х, у,* ...)  **Т*.*** *Пусть F* (*и, х, у*) *дифф‒ма в некоторой окрестности М0* (*и°, х°, у°*) *R, причем непрерывна в М0. Тогда, если в М0 ф‒я F обращается в* 0*, а не обращается в* 0*, то для достаточно малого* ε > 0 Ǝ *такая окрестность М'0* (*х°, у°*) *R', что в пределах этой окрестности* Ǝ !  *ф‒я и =* φ (*х, у*)*, которая удовлетворяет* | *и ‒* *и°* | < ε *и является решением уравнения F* (*и, х, у,* ...) = 0, **(1)**  *причем и =* φ (*х, у*) *непрерывна и дифф‒ма в этой окрестности М'0.*  *Док‒во.* **1.** Докажем, что для достаточно малого ε > 0 *в ок­рестности*  *М'0* (*х°, у°*)Ǝ ! *и =* φ (*х, у*)*, удовлетворяющая* | *и ‒* *и°* | < ε *и являющаяся решением* (1). Уравнение (1) определяет в *R* некото­рую поверхность *S*. *F* (*М0*) *=* 0 => *М0 S*. Геометрически однозначная разрешимость (1) относительно *и* : часть *S*, близкая к М0, однозначно проектируется на *Оху.*  Пусть  *>* 0в *М0* => из непрерывности в *М0* и из теоремы об устойчивости знака непре­рывной ф‒и => Ǝ *окрестность М0* , *в пределах которой >* 0 *.* Пусть эта окрестность ‒ шар Ω достаточно малого радиуса с центром в *М0.* Фиксируем ε > 0 столь малым, чтобы *М1* (*и° ‒ ε*, *х°, у°*)и *М2* (*и°+ ε*, *х°, у°*)были внутри Ω. Рассмотрим *F* (*и, х°, у°*)переменной *и* на [*и° ‒ ε*, *и° + ε*]. Геометрически: рассматриваем ф‒ю 3 переменных *F* (*и, х, у*) вдоль отрезка *М1М2* . Т.к. (*и, х°, у°*) *>* 0 на [*и° ‒ ε*, *и° + ε*], то *F* (*и, х°, у°*)возрастает на этом сегменте => т.к. F = 0 при *и = и° ,* то *F* (*M1*) < 0, *F* (*M2*) > 0.  Рассмотрим *F* (*и° ‒ ε, х, у*)и *F* (*и° + ε, х, у*) 2 переменных *х* и *у*  (ф‒ю *F* (*и, х, у*) на 2 плоскостях, параллельных *Оху,* 1‒я проходит через *М1,* а 2‒я ‒ через *М*2). *F* (*M1*) < 0, *F* (*M2*) > 0 и *F* (*и, х, у*) непре‒рывна всюду в шаре Ω, то по Т об устойчивости знака непрерывной ф‒и на этих плоскостях Ǝ окрестности *М1* и *М2*, в пределах которых *F* сохраняет те же знаки, что и в *М1* и *М2*. Эти окрестности взять в виде открытых квадратов с центрами в *М1* и *М2* и с малой стороной 2δ.  Возьмем δ столь малым, чтобы оба квадрата лежали внутриΩ =>  точка пр‒ва (*и, х, у*)c координатами:  будет лежать внутри Ω. Геометрически (3) ‒ открытый прямоугольный параллелепипед П с центром в *М0*  со сторонами = 2ε, 2δ и 2δ и параллельными осям координат *и, х, у*. Т.к. П лежит внутри Ω, *то всюду в* П:  *>* 0*.* Из (2) => *F* (*и, х, у*) < 0 *на нижнем основании* П *и F* (*и, х, у*) > 0 *‒ на верхнем*. | Докажем, что (1) однозначно разрешимо относительно *и,* если *F* (*и, х, у*) рассматривать лишь для значений *и, х*, *у,* лежащих внутри П. Пусть  *М'* (*х, у*) *‒* точка *R*', координаты которой удовлетворяют  **(4)**  => *М'* (*х*, *у*)ле­жит внутри квадрата с центром в *М'0* (*х°, у°*)и со сторо‒нами 2δ. Надо доказать, что для координат *х*, *у* точки *М'* Ǝ !число *и* из [*и° ‒ ε*, *и° + ε*]: *F* (*и, х, у* ) = 0. (Геометрически: прямая, парал*‒*лельная оси *и* и пересекающая П, пересекает *S* внутри П в только 1 раз.)  Зафиксировав *х* и *у,* удовлетворяющие (4), рассмотрим *F* (*и, х, у*) аргу*‒*мента *и* на [*и° ‒ ε*, *и° + ε*], т. е. ф‒ю *F* (*и, х, у*)на отрезке *М'*1 *М'*2*,* где *М'*1и *М'*2 ‒точки пересечения прямой, про­ходящей через *М'* (*х, у*)и па*‒*раллельной *Оu*, с основа­ниями П. (*и, х, у*) *>* 0 на [*и°‒ ε*, *и°+ ε*], => *F* (*и, х, у*) возрастает на этом сегменте (на отрезке *М'*1 *М'*2) *=>*  из *F* (*M'1*) < 0, *F* (*M'2*) > 0 => внутри [*и° ‒ ε*, *и° + ε*] Ǝ 1 значение *и* : *F* (*и, х, у* ) = 0 (внутри отрезка *М'*1 *М'*2Ǝ ! точка М *S*.)  Пусть *и* = φ (*х*, *у*)символизирует то правило, посредством которого каждой *М'* (*х*, *у*)из окрестности (4) ставится в соответствие единствен*‒*ное число *и* из [*и° ‒ ε*, *и° + ε*], для которого *F* (*и, х, у* ) = 0 => в окрестности (4) Ǝ ! ф‒я *и* = φ (*х*, *у*)*,* удовлетворяющая | *и ‒* *и°* | < ε и являющаяся решением (1).  **2.** Докажем, что *и* = φ (*х*, *у*)непрерывнав *М'* (*х, у*)окрестности(4). Т.к. для *М'* (*х, у*)из окрестности (4) выполнены те же условия, что и для *М'0* (*х°, у°*) (т.е. точке *М'* (*х, у*)из окрестности (4) соответствует  *М* (*и, х, у*) *R* : *F* (*и, х, у* ) = 0 в *М,* дифф‒ма в некоторой окрестности *М* и имеет в этой окрестности ≠0 частную производную)*,* то достаточно доказать непрерывность *и* = φ (*х*, *у*)лишь в *М'0* (*х°, у°*)*.* Надо доказать, что для ε > 0Ǝ δ > 0 : для *х* и *у,* удовлетворяющих (4), справедливо  | *и ‒* *и°* | < ε, где *и* = φ (*х*, *у*),  *и°* = φ (*х°*, *у°*)*.* Если взять в ка­честве ε то число, которое выбрано при рассмотрении п. 1, то суще‒ствование δ обеспечивается неравенствами (3). В рассуждениях п. 1  ε > 0можно взять как угодно малым => непрерывность *и =* φ (*х*, *у*). Условие непрерывности *и* = φ (*х*, *у*)в *М'0* (*х°, у°*) в разностной форме: Δ*u* → 0 при Δ*х* → 0 и Δ*y* → 0.  **3.** Докажем *дифф‒сть*  *и =* φ (*х*, *у*)в *М'* (*х, у*)окрестности (4). В силу замечания из п. 2 достаточно доказать дифф‒сть в *М'0* (*х°, у°*)*.* Т.к. *F* (*u°, х°, у°*) *=* 0 и *F* (*u°+* Δ*u, х°+* Δ*х, у°+* Δ*y*) = 0, то *полное приращение* Δ*F* *функции F* (*и, х, у*)в точке *М0* (*u°, х°, у°*) соответству‒ющее приращениям аргументов Δ*u*, Δ*х* и Δ*y*, *равно 0.* Но из дифф‒сти *F* (*и, х, у*)в точ­ке *М0* (*u°, х°, у°*) :  , и  *берутся в М0* (*u°, х°, у°*)*,* α, β и γ → 0 при Δ*u* → 0,  Δ*х* → 0 и Δ*y*→0  Из разностной формы условия непрерывности *и* = φ (*х*, *у*)в *М'0* (*х°, у°*) : Δ*u* → 0 при Δ*х* → 0 и Δ*y* → 0 => из Δ*х* → 0 и Δ*y* → 0 => α, β и γ → 0.  По условию теоремы  *≠* 0 в *М0.* Т.к. γ → 0 при Δ*х* → 0 и Δ*y* → 0, то при *достаточно малых* Δ*х* и Δ*y* выражение  *не обращается в 0 =>* (5) можно на него поделить :  По теореме о предельном значении частного двух функций :  где μ и ν→ 0 при Δ*х* → 0 и Δ*y* → 0. Из (6) и (7) =>  (8) доказывает дифф‒сть *и* = φ (*х*, *у*)в *М'0* (*х°, у°*)*.* |

|  |  |
| --- | --- |
| **28. Теорема о разрешимости системы функциональных ур-ний.**  Пусть *т* функций  ищутся как решение системы *т* функциональных уравнений  Решение системы (2) ‒ это совокупность *т* ф‒й (1) таких, что при их подстановке в (2) все уравнения системы обращаются в тождества. Это решение называется непрерывным и дифф‒мым в области *D* изменения *х*1, ..., *хп*,если каждая из ф‒й (2) непрерывна и дифф‒ма в *D. R ‒* пр‒во (*т + п*)переменных *и*1, ..., *ит, х*1, ..., *хп,*  *R*' ‒ пр‒во *п* переменных *х*1, ..., *хп.* Из частных производных функций *F1*, …, *Fm*  составим *определитель Якоби* (*якобиан*):  **Т.***Пусть т функций*  *дифф‒мы в некоторой окрестности М0* (*и*1*°*, ..., *ит°, х*1*°*, ..., *хп°*) *R, причем их частные производные по и*1, ..., *ит* *непрерывны в М0. Тогда, если в М0 все ф‒и* (4) *=* 0*,* *а якобиан*  *≠* 0*, то для достаточно* *малых* ε1 > 0, ..., ε*т* > 0 Ǝ *окрест­ность М'0* (*х*1*°*, ..., *хп°*) *R', что в пределах этой окрестности* Ǝ ! *т функций* (1), *которые удовлетворяют условиям* | *и1 ‒* *и1°* | < ε1, …, | *иm ‒* *иm°* | < ε*m и являются решением системы* (2), *причем это решение непрерывно и дифф‒мо в указанной окрестности М'0*.  *Док‒во.* По индукции. При *т* = 1 это теорема о существовании и дифф‒сти неявно заданной ф‒и. Пусть теорема справедлива для системы *т ‒* 1 уравнений, докажем для системы *т* уравнений. Т.к.  ≠ 0 в *М*0, то хотя бы 1 из его миноров(*т ‒* 1)‒го порядка ≠ 0 в *М*0, например, минор, стоящий в левом верхнем углу => по предполо*‒*жению индукции, первые *т* ‒ 1 уравнений (2) разрешимы относи*‒*тельно *и*1, ..., *ит‒1 =>* для малых ε1 > 0, ..., ε*т >* 0 Ǝ такая окрестность *М''0* (*ит°, х*1*°*, ..., *хп°*) пр‒ва *R''* переменных (*ит, х*1, ..., *хп*)*,* что в пределах этой окрестности определены *т ‒* 1 функций  которые | *и1 ‒* *и1°* | < ε1, …, | *иm‒1 ‒* *иm‒1°* | < ε*m‒1* и являются единственным непрерывным и дифф‒мым решением системы первых *т ‒* 1 уравнений (2).  Подставим (4) в левую часть последнего уравнения из (2) => она превращается в функцию Ψ, зависящую только от *ит*, *х*1, ..., *хп*  Т.о., послед­нее из уравнений (2) приводит к уравнению  В силу (5) Ψ (*ит, х1* ..., *хп*) ‒ сложная ф‒я своих аргументов => по теореме о дифф‒сти сложной ф‒и, Ψ (*ит, х1* ..., *хп*) *дифф‒ма в некоторой окрест­ности М0''* (*ит°, х*1*°*, ..., *хп°*)  *R".* Из (5) и последнего из уравнений (2) => Ψ (*ит°, х1°,* ..., *хп°*) = 0 => чтобы доказать, что к (6) применима теорема о существовании и дифф‒сти неявно заданной ф‒и и это уравнение разрешимо относительно *ит ,* достаточно установить, что ≠ 0 и непрерывна в *М0''*. Под‒ставим в 1-ые *т ‒* 1 уравнений (2) ф‒ии (4) и продифф‒ем по *ит* :  …………………………………………………. | Продифф‒ем (5) по *ит* :  Умножим (71) ‒ (7*т*) на соответствую­щие алгебраические дополне‒ния Δ1, .... Δ*m*  элементов послед­него столбца якобиана (3) и сложим  Т.к. сумма произведений эл‒тов данного столбца определи­теля на соотв‒щие алгебраические дополнения элементов этого (другого) столбца = определителю (0), то каждая [ ] = 0, а ( )= якоби­ану (3) =>  Δ ‒ якобиан (3), Δ*т* ‒ алгебраиче­ское дополнение последнего элемента последнего столбца, которое совпадает с левым верхним минором и, по предположению, *≠* 0в *М*0. Поделим (8) на Δ*m* :  Формула (9), справедливая в *М0''*, доказывает непрерыв­ность в *М0'',* т.к Δ и Δ*m* состоят из частных производных функций (4) по *и*1, ..., *ит ,* непре­рывных в *М*0. Из (9) => ≠ 0 в *М0''* (т.к. Δ ≠ 0 в *М*0). Т.о., к (6) можно применить теорему о существовании и дифф‒сти неявно заданной ф‒и: для дост-но малого ε*т* > 0 Ǝ окрестность *М'0* (*х*1*°*, ..., *хп°*) *R*', что всюду в ее пределах определена ф‒я  которая удовлетворяет | *иm ‒* *иm°* | < ε*m* и является единственным непрерывным и дифф‒мым решением уравнения (6). Имея в виду, что ф‒и (4) являются решениями первых *т ‒* 1 уравнений (2) при  *ит, х*1 ..., *хп* из окрестности *М0''*, и вставляя (10) в (4), получим  функции, зависящие только от *х1,* ..., *хп:*  По теореме о дифф‒сти сложной функции каждая из *φ*1, ..., *φm‒1* дифф‒ма в окрестности *М'0* (*х*1*°*, ..., *хп°*). Т.о., доказано: *т* функций  удовлетворяют в окрестности *М'0* условиям | *и1 ‒* *и1°* | < ε1, …,  | *иm ‒* *иm°* | < ε*m* и являются при наличии этих усло­вий единственным непрерывным и дифф‒мым в некоторой окрестности *М'0* (*х*1*°*, ..., *хп°*) решением системы (2). Осталось доказать, что функции (11) являются единственным решением системы (2). Пусть кроме ф‒й (11), существуют еще *т* функций  также являющихся решением системы (2) и удовлетворяющих | *1 ‒* *и1°* | < ε1, …, | *m ‒* *иm°* | < ε*m .* Тогда, в силу предположения индукции, первые (*т* ‒ 1) функ­ций (11) являются при заданном  *ит = т* единствен­ным и дифференцируемым решением системы первых (*т ‒* 1) уравне­ний (2). Но при заданном *ит* единственное решение системы первых (*т ‒* 1) уравнений (2) дается равенствами (4). Т.о., справедливы  где Ф1, ..., Ф*т*‒1 ‒ те же функции, что и (4) => из последнего уравнения (2) и соотношения (5) => *т* ‒ единственное реше­ние уравнения (6), т. е. *т* = *ит =>* из (4') и (4) => *1* = *и1,* ..., *т‒1* = *ит‒1.* |

|  |  |
| --- | --- |
| **29. Понятие зависимости функций. Функциональные матрицы.**  Пусть *т* функций от одних и тех же *п* переменных  определены и дифф‒мы в некоторой открытой *n*‒мерной области *D.*  *1 из этих ф‒й,* напр. *uk* , *зави­сит в области D от остальных, если для всех то­чек* (*x1*, ..., *xn* ) *D* : *uk =* Ф (*u1*, …, *uk‒1*, *uk+1*, …, *um*) **(2)**  *где* Ф ‒ *некоторая ф‒я, определенная и дифф‒мая в соответствующей области изменения своих аргументов.* Функции *u1*, …, *um* *зависимы в области D,* если 1 из них зависит в *D* от остальных.  Если дифф‒мой ф‒и Ф : сразу для всех точек области *D* справедливо тождество вида (2), то *u1*, …, *um* независимы в *D.*  *Определитель Якоби*:  **Т1*(достат. усл-е незав-сти).*** *Пусть m функций от п* ≥ *т переменных*  *определены и дифф‒мы в окрестности М0* (*х*1*°*, ..., *хп°*). *Тогда если якобиан из этих функций по каким‒либо т переменным отличен от* 0 *в M*0, *то эти ф‒и независимы в некоторой окрестности М0.*  Док‒во. Пусть в *М0* отличен от 0 якобиан  Пусть *u1*, …, *um* зависимы в некоторой окрестности *М0*  :  *uk =* Ф(*u1*, …, *uk‒1*, *uk+1*, …, *um*)  где Ф ‒ некоторая дифф‒мая ф‒я. Производ­ная сложной *иk* по *xl* :  => если их взять (3) для каждого *l* = 1, 2, ..., *т* в *М0* , то *k‒я* строка якобиана (2) является линейной комбинацией остальных строк с коэффициентами => якобиан (2) = 0 в *М*0, => противоречит условию теоремы.  **Функциональные матрицы.** Пусть функции (1) определены и диф­ф‒мы в некоторой окрестности *М0* (*х*1*°*, ..., *хп°*) и все их частные производные 1‒го порядка непре­рывны в самой *М0.*  Функциональная матрица из *т* строк и *п* столбцов:  **Т2***. Пусть у функциональной матрицы* (4): 1) *некоторый минор r ‒го порядка*  *отличен от* 0 *в М0* (*х*1*°*, ..., *хп°*), 2) *все миноры* (*r* + 1) ‒*го* *порядка =* 0 *в не­которой окрестности М0*. *Тогда r функций, представ*‒*лен­ных в указанном миноре r‒го порядка, независимы в окрестности М0, каждая из остальных функций зависит в этой окрестно­сти от указанных r функций.* (Если *r =* min (*m*, *n*), требование 2) опустить)  *Док‒во*. Пусть в *М0* ≠ 0 минор в левом верхнем углу (4)  => из Т1 =>независимость *и1,* ..., *иr* в окрестности *М0* . Надо доказать, что из *иr+1,* ..., *ит* (*m > r*) зависит в окрестности *М0* от *и1,* ..., *иr .* Напри‒мер *иr+1* . Пусть *и1°* = φ1 (*х*1*°*, ..., *хп°*),..., *иr°* = φ*r* (*х*1*°*, ..., *хп°*) =>то всюду в неко­торой окрестности *N0* (*и1°, …, иr°, х*1*°*, ..., *хп°*)  (*п* +*r*)‒мерного пр‒ва 1‒ые *r* функций (1) являются един­ственным и дифференцируемым решением системы уравне­ний : | (в *N0* все *F1,* .... *Fr* обращаются в 0, а = (‒1)*r* ≠ 0 => выполнены условия теоремы о разрешимости системы функциональных уравнений). Якобиан совпадающий с минором (5), ≠ 0 в *N*0 => всюду в достаточно малой окрестности *N*0 система (6) имеет единственное и дифф‒мое решение  Равенства (7) и 1‒ые *r* равенств (1) пол­ностью эквивалентны в окрест‒ности *N*0 : если подставить *x1,* ..., *xr* из (7) в 1‒ые *r* равенств (1), то они обратятся в тожде­ства относительно *xr+1*, ..., *хп, и*1 ..., *иr .* Дифференцируя (7) по *xl* (*l* = *r* + 1, ..., *п)* и замечая, что *и*1 ..., *иr* ­не зависят от *xr+1*, ..., *хп* :  Равенства (81) ‒ (8*r* ) справедливы для всех значений *x1,* ..., *xr , xr+1*, ..., *хп* из некоторой окрест­ности *М*0. Подставим *x1,* ..., *xr* из (7) в (*r +* 1)‒е равен­ство (1) => *иr+1* ‒ функция Ф от *и*1 ..., *иr, xr+1*, ..., *хп,* т.к.  => *иr+1* зависит в не­которой окрестности *М*0 от *и1,* ..., *иr*. Остается доказать, что для всех значений *x1,* ..., *xr , xr+1*, ..., *хп* , лежащих в малой окрест­ности *М0,* функция Ф *не зависит от xr+1*, ..., *хп .* Дост‒но доказать, что для всех *x1*, ..., *хп* из достаточно малой окрестности точки *М0* :  Продифференцируем Ф по *xl* (*l* = *r* + 1, ..., *п*)как сложную ф‒ю:  Рассмотрим минор (*r* + 1)‒го порядка матри­цы (4):  По условию теоремы он *=* 0 всюду в окрестности *М0.* Умножим равенства (81) ‒ (8*r+*1) на соответ­ствующие алгебраические дополнения Δ1, .... Δ*r+1*  элементов последнего столбца (10) и сложим  Т.к. сумма произведений элемен­тов данного столбца на соответствую‒щие алгебраические дополне­ния элементов этого (другого) столбца равна определителю (0), то каждая [ ] = 0, а ( ) = минору (10):  Δ ‒ минор (10), = 0 всюду в окрестности *М0,*  алгебраическое дополне­ние Δ*r*+1 совпадает с минором (5), ≠ 0 в *М*0 и в некоторой окрестности *М*0 (Т.к. все частные производные, входящие в (5), непре­рывны в *М0,* то и сам минор (5) непрерывен в *М0 =>* по теореме об устойчивости знака непрерывной функции этот минор ≠ 0 не только в *М0,* но и в некоторой ее окрестности). Из (11) => всюду в некоторой окрестности *М0* справедливы равенства (9). |

|  |  |
| --- | --- |
| **30. Условный экстремум и методы его отыскания**  Пусть требуется найти экстремум функции *т* + *п* переменных  при наличии *т* условий связи  *Функ­ция* (1) *при наличии связей* (2) *имеет* ***условный максимум* (*минимум***) *в М0* (*х*1*°*, ..., *хп°*, *y*1*°*, ..., *ym°*)*, координаты кото­рой удовлетворяют условиям связи* (2), *если* Ǝ *такая окрестность М0, в пределах которой значение функции* (1) *в М0 является наибольшим (наименьшим) среди ее значений во всех точках, координаты которых удовлетворяют условиям связи* (2).  Пусть функции в левых частях равенств (2) дифф‒мы в некоторой окрест­ности *М*0, в самой *М0* их частные производные по *у1*,..., *ут* непрерывны, и отличен от 0 якобиан:  => по теореме о разрешимости системы функциональных уравнений для достаточно малых ε1 > 0, ..., ε*m* > 0 Ǝ такая окрестность *М'0* (*х*1*°*, ..., *хп°*)пр‒ва переменных (*х*1, ..., *хп*),что всюду в пределах этой окрестности определены *т* функций  удовлетворяющих | *y1 ‒* *y1°* | < ε1, …, | *ym ‒* *ym°* | < ε*m* и являющихся при наличии этих условий единственным и дифф‒мым решением системы уравнений (2). Подставляя (4) в (1), сведем вопрос о существо­вании условного экстремума в точке *М0* у (1) при на­личии связей (2) к вопросу о существовании безусловного экс­тремума в точке *М'0* у сложной функции аргументов *х*1, ..., *хп*  Установим необходимые условия существования условного экстремума в *М*0. Пусть (1) дифф‒ма в *М*0 и имеет в этой точке условный экстремум при наличии связей (2), т.е., (5) имеет в *М'0* безусловный экстремум. Необходимое условие безусловного экстремума функции *и =* Ф (*x1*, ..., *хn* ) в *М'0* :  тождественное отн‒но *dх1*, ...., *dхп .* В силу инвариантности формы 1‒го дифференциала и равенства (5) формулу (6) будет :  (все частные производные берутся в *М*0.) В (7) *dy1*, ...., *dут* ‒ это дифференциалы функций (4) => (7) не является тождеством отн‒но *dy1*, ...., *dут .* Если в уравнения связи (2) подставить (4), являющиеся решением системы (2) => урав­нения (2) обратятся в тождества, дифференци­руя их:  Т.к. якобиан (3 ≠ 0 в *М0,* то из линейной системы (8) *dy1*, ...., *dут* можно выразить как линейные функции *dх1*, ...., *dхп .* Если найти эти выра­жения и подставить в (7), то, собирая члены, содержащие *dх1*, ...., *dхп*  :  где *А1,* ..., *Аn* ‒ некоторые рациональные функ­ции частных производных *f*, *F1,* ..., *Fт* в *М0.* Т.к. в (9) фигурируют лишь дифференциалы независимых переменных*,* то из (9) =>  *А1* = 0, ..., *Ап* =0 => *Необходимые условия* существования условного экстре­мума функции (1) при наличии связей (2) :  *А*1= 0, ..., *Ап* =0, *F1 =* 0*,* ..., *Fт =* 0 **(10)**  (10) ‒ это система *т + п* уравнений для определения *т* + *п* координат точки возможного экстремума. | **Метод неопределенных множителей Лагранжа**. Симметризирует роль переменных. Умножим (8) на произвольные постоянные множители λ1, ..., λ*m* и сложим с (7):  Выберем множители λ1, ..., λ*m* так, чтобы выполнялись равенства  здесь определитель ((3)) ≠0. В силу (13) равенство (11) примет вид  Т.к. переменные *х*1, ..., *хп* ‒ независимые*,* то из (14) =>  (13) + (15) + (2) => получим систему *п +* 2*т* уравнений  для определения *п + т* координат точек возможного условного экстремума и *т* множителей λ1, ..., λ*m* .  **Достаточные условия**. Пусть в *М0* выполнены необходимые условия экстремума (16). Еще потребуем 2‒кратной дифф‒сти функций (1) и (2) в окрест­ности *М*0 и непрерывности всех частных производных 2‒го по­рядка в самой *М0.* Из конструкции функции Лагранжа (12) => при наличии связей(2) экстремумы функции (1) и функции Лагранжа совпадают (т.к. *f* (*M*) ‒ *f* (*M0* ) = Ψ(*M*) ‒Ψ(*M0* ) ) => для получения достаточного условия экстремума в *М0* у функции (1) при наличии связей (2) надо потребовать знако‒определенности в *М0  d* 2 Ψ: в *М0 ‒* минимум, если *d* 2 Ψ| M0 > 0, и максимум, если *d* 2 Ψ| M0 < 0. 2‒й дифференциал *d* 2 Ψ можно в данной *М*0 возможного экстремума вычислять так, как если бы все *х*1, ..., *хп , y*1, ..., *yт* были независимыми*.* Но в общем случае 2‒й дифференциал *d* 2 Ψ не обладает свойством инвариантности формы и должен с учетом зависимости *y*1, ..., *yт* от *х*1, ..., *хп* определяться равенством  Но в точке возможного экстремума *М0* :  что и в случае, когда все *х*1, ..., *хп , y*1, ..., *yт* незави­симы. Надо в (17) подста­вить вместо *dy*1, ..., *dyт* их значения из систе­мы (8). Потом изучить знакоопределен­ность *d* 2 Ψ в данной *М*0. |